Areté. Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela
Vol. 9, N° 17, 63 – 77, enero – junio, 2023. ISSN: 2443 – 4566
DOI: https://doi.org/10.55560/arete.2023.17.9.3

TRATAMIENTO Y CONVERSIÓN DE REGISTRO DE REPRESENTACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA POR INGENIEROS EN FORMACIÓN

TREATMENT AND CONVERSION OF THE REGISTER OF REPRESENTATION OF THE DEFINITE INTEGRAL BY ENGINEERS IN TRAINING

JORGE H. TELLO
UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ, ARICA, CHILE
jhernandez@academicos.uta.cl
https://orcid.org/0000-0002-4564-100X

ELIZABETH H. ARREDONDO
UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS, OSORNO, CHILE
elizabeth.hernandez@ulagos.cl
https://orcid.org/0000-0002-5285-1603

JAIME I. GARCÍA-GARCÍA
UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS, OSORNO, CHILE
jaime.garcia@ulagos.cl
https://orcid.org/0000-0002-8799-5981

Fecha de recepción: 10 enero 2023
Fecha de aceptación: 3 abril 2023

RESUMEN

Este artículo explora el tratamiento y la conversión de los registros de representación semiótica que movilizan estudiantes de ingeniería en agronomía acerca del objeto matemático ‘integral definida’ cuando tratan de apropiarse de su significado, apoyándose con el uso de GeoGebra. Con el sustento de la Teoría de Registro de Representación Semiótica y un análisis de carácter cualitativo de un estudio de caso, se muestran los desarrollos generados por los estudiantes a la tarea de modelar la integral definida de una situación contextualizada. Dentro de los resultados se identifica que el uso del software apoyó, principalmente, a la mediación entre el tratamiento tabular y gráfico, y a su vez, la conversión de estos a un lenguaje algebraico fuera del computador.

PALABRAS CLAVE: Integral definida; registro de representación semiótica; formación de ingenieros.

ABSTRACT

This article explores the treatment and conversion of the semiotic representation registers mobilized by agronomy engineering students about the mathematical object 'definite integral' when they try to appropriate its meaning, supported using GeoGebra. With the support of the Theory of Semiotic Representation Register and a qualitative analysis of a case study, the developments generated by the students in the task of modeling the definite integral of a contextualized situation are shown. Within

Tello, J. H., Arredondo, E. H. y García-García, J. I. (2023). Tratamiento y conversión de registro de representación de la integral definida por ingenieros en formación. *Areté. Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela.* 9 (17), 63 – 77. https://doi.org/10.55560/arete.2023.17.9.3

the results it is identified that the use of the software supported, mainly, the mediation between the tabular and graphic treatment, and in turn, the conversion of these to an algebraic language outside the computer.

KEY WORDS: Definite integral; register of semiotic representation; engineering education.

1. INTRODUCCIÓN

Dentro de la literatura especializada en Matemática Educativa, cada vez es más frecuente encontrar trabajos que se preocupan por el desarrollo de la comprensión matemática de los ingenieros; siendo así que en la última década se ha consolidado un grupo de matemáticos educativos que exploran los fenómenos y problemáticas presentes en la formación matemática de estos profesionales, principalmente, en lo que respecta a procesos de modelación y simulación (Rodríguez, 2017). En diversos estudios, como Kohen y Orenstein (2021), se investigan los métodos que utilizan los ingenieros para simplificar los problemas del mundo real relacionados con la tecnología, y cuál es su relación con los problemas de enseñanza secundaria; de manera similar, Carli et al. (2020) combinan problemas de la integral en el contexto de la física, evidenciando la importancia de los problemas contextualizados para la instrucción universitaria.

Dentro de los principales desafíos reportados, nos encontramos con dos fenómenos ampliamente reportados en la literatura (Dreyfus y Kouropatov, 2021): 1) el desarrollo de los cursos de matemáticas que focalizan el proceso de enseñanza-aprendizaje en el uso de algoritmos y fórmulas, olvidando así la importancia de los significados matemáticos en la modelación; y 2) la desarticulación entre los diferentes registros de representación asociados a cierto objeto matemático o idea fundamental del cálculo. Enseguida, se presentan algunas investigaciones que reportan resultados que reafirman la observación anterior.

El cálculo diferencial e integral está insertado en los diferentes currículos escolares universitarios con paradigmas de enseñanza diversos; por ejemplo, hay quienes privilegian la enseñanza de este a partir del uso de algoritmos en problemas rutinarios (Depool, 2005), mientras que otros enfatizan en la introducción y reflexión de este a partir de la construcción axiomática, apoyados en el uso formal de demostraciones matemáticas (Tall, 1996).

Las investigaciones más recientes sobre el análisis del currículo del cálculo, en educación media y superior, señalan que los diseños curriculares están fuertemente arraigados en las experiencias, las creencias y los puntos de vista del grupo de diseño curricular, más que en el desarrollo de nociones fundamentales del cálculo, así como en la promoción del pensamiento matemático avanzado o de los razonamientos cuantitativo y covariacional reportados en la literatura, elementos característicos de esta disciplina (Dreyfus y Kouropatov, 2021; Tallman et al., 2021).

Esta diversidad curricular en la enseñanza del cálculo propone diversos desafíos en el desarrollo de pensamiento matemático avanzado, por ejemplo, el desarrollo de ideas fundamentales como la integral definida; este concepto es muy importante para enfrentar una gran cantidad de problemas en los cursos de ingeniería (Camacho et al., 2008). Otro desafío que se manifiesta es el uso de la tecnología como un mediador en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo (Martínez-Miraval y García-Cuéllar, 2020).

Dentro de los trabajos que potencian el uso de tecnología y convergen en el estudio de la integral definida, se han identificado las siguientes problemáticas para el proceso de enseñanza-aprendizaje de dicha integral (Domínguez et al., 2019; Aranda y Callejo, 2017; Tatar y Zengin, 2016): 1) no es clara la dependencia entre la sucesión de sumas de Riemann y en valor n de la partición realizada; 2) no se emplea el concepto de sucesión de forma funcional, sino como un listado de elementos; y 3) no se relaciona el límite de las sumas de Riemann y la idea de área bajo la curva.

En la investigación de Domínguez et al. (2019) se ponen de manifiesto las dificultades de los estudiantes al momento de interpretar la integral definida desde una perspectiva gráfica; mientras que, en trabajo desarrollado por Tatar y Zengin (2016) se hace referencia a la falta de coordinación entre los procesos de partición, sumas y límites con sus respectivas representaciones tanto algebraica, gráfica y numérica. Dentro de sus conclusiones se menciona que esta falta de coordinación ocasiona que los estudiantes no adquieran un conocimiento sólido acerca de la integral definida.

Por otro lado, Kartika et al. (2019) señalan que muchos estudiantes tienen una comprensión no idónea de la integral definida, algunos de ellos se desvían del concepto formal y garantizan la existencia de esta sin una razón lógica. En otros casos, los estudiantes comprenden algunos conceptos asociados a la integral definida, pero a pesar de ello, tienen dificultad para usarlos al definir dicha integral. De hecho, Jones (2018) examina los prototipos de imágenes que utilizan los estudiantes sobre la comprensión de la integral definida, notando que en diversos contextos tendían a usar bastantes imágenes similares entre sí al representar y discutir las representaciones gráficas de la referida integral.

Diversos estudios, como en el de Peña et al. (2019), muestran la utilidad del concepto de integración numérica como alternativa para el cálculo de integrales definidas en situaciones contextualizadas, en las que las técnicas de integración pueden resultar insuficientes o complejas; también se establece la necesidad del uso de la descomposición de las regiones irregulares en figuras regulares (rectángulos y algunas veces triángulos rectángulos) con el fin de tener una aproximación al valor del área de la región delimitada.

Otro aspecto relevante para esta investigación se encuentra en las respuestas de los estudiantes a tareas relacionadas con el concepto de integral definida, esto con el objetivo de analizar su comprensión. Bajracharya et al. (2012) realiza un estudio con las respuestas de los estudiantes a preguntas que tratan sobre representaciones gráficas de integración, en especial con el área bajo la curva. De forma similar, Carli et al. (2020), por medio de una prueba de opción múltiple, analizan la capacidad de responder de los estudiantes a problemas relacionados con la física que involucren la integral.

En los resultados expuestos en Domínguez et al. (2019) se indica que los estudiantes tienen dificultades para interpretar la derivada y la integral de manera gráfica, aun teniendo instrucción de sus primeros cursos de cálculo y de física universitaria; mientras que Serhan (2015) concluye que los estudiantes tienen la capacidad de utilizar el conocimiento procedimental y resolver problemas de integración, pero desarrollan una comprensión limitada de los conceptos básicos de integración.

Tello, J. H., Arredondo, E. H. y García-García, J. I. (2023). Tratamiento y conversión de registro de representación de la integral definida por ingenieros en formación. *Areté. Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela.* 9 (17), 63 – 77. https://doi.org/10.55560/arete.2023.17.9.3

Lo anteriormente expuesto ha motivado al desarrollo de esta investigación cuyo objetivo es explorar el tratamiento y la conversión de los registros de representación semiótica que movilizan estudiantes de ingeniería en agronomía acerca del objeto matemático 'integral definida' cuando tratan de apropiarse de su significado, apoyándose con el uso de GeoGebra, pues consideramos que hay dificultades en la comprensión de las distintas representaciones usadas para construir el significado de la integral definida; para ello, utilizamos elementos de la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval (1995) y un diseño didáctico relacionado con la utilización de registros de representación.

Enseguida se exponen algunos de los conceptos en los que nos apoyamos para analizar el tratamiento desarrollado por los estudiantes, pues consideramos que un análisis de este tipo puede apoyar dando pistas sobre el desarrollo de actividades donde se encuentren presentes aspectos tales como: contextos reales, la integral definida y el uso de tecnología.

2. Marco Teórico

El marco teórico para este trabajo establece que un estudiante que está frente a un registro de representación semiótica (RRS) (Duval, 1995) es provisto de una perspectiva semiótica cognitiva, la cual plantea abordar los problemas de aprendizaje de la matemática a partir de distintos signos que se usan en la práctica matemática (Godino et al., 2016). Los signos son entendidos como algo que está en lugar de otro algo para alguien (Presmeg et al., 2016) y son formas de representación material o externas que requieren que se encuentren en condiciones para desarrollar tres actividades de carácter cognitivo: 1) construir una traza (registro o huella) o conjunto de estas que sean representación del algún objeto o sistema; 2) transformar las representaciones mediante las reglas propias del sistema de representación; y 3) convertir las representaciones producidas en un sistema a otro sistema, de manera que estas últimas permiten explicitar otras significaciones relativas a lo que se representa (Duval, 1995).

Dos procesos clave en la teoría de RRS son la semiosis y la noesis. De acuerdo con Duval (1995, p.3), se llaman semiosis a "la aprehensión o la producción de una representación semiótica", y noesis a "los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia".

Según Duval (2006, 2017), a los estudiantes se les deben proponer actividades de conversiones entre diferentes registros de representación semiótica, esto con el propósito de favorecer su aprendizaje. Hay dos clases de transformaciones de cualquier representación semiótica: la conversión y el tratamiento; estas son cognitivamente independientes, aunque matemáticamente la primera depende de la segunda. En otras palabras: el tratamiento es una actividad que supone una transformación entre representaciones de un mismo registro semiótico, y la conversión en una actividad supone las transformaciones entre representaciones de distintos registros semióticos.

El tratamiento se utiliza como el espacio de construcción del concepto integral definida en los diferentes registros y, con ello, sus conversiones. La conversión y el tratamiento deben estar por separado para analizar lo realizado por los estudiantes cuando se enfrentan con un problema.

Otro aspecto que se recupera para el encuadre teórico es que con las actividades que se pretenden plantear, además de buscar desarrollar diferentes significados parciales de la integral definida a partir del uso del RRS, se busca el desarrollo de los dos razonamientos que caracterizan la enseñanza del cálculo, a saber: 1) razonamiento cuantitativo, es una caracterización de las acciones mentales involucradas en la conceptualización de situaciones en términos de cantidades y relaciones cuantitativas (Smith y Thompson, 2007); y 2) razonamiento covariacional, se refiere a las acciones mentales involucradas en la coordinación de los valores de dos cantidades variables, mientras se presta atención a cómo estos valores cambian entre sí (Carlson et al., 2002).

Lo anterior nos lleva a proponernos la siguiente pregunta de investigación: ¿qué tipo de tratamientos y conversiones entre registros de representación semiótica desarrollan un grupo de ingenieros en formación cuando resuelven problemas contextualizados haciendo uso del concepto de integral definida

3. MÉTODO

El método implementado en este estudio es de carácter cualitativo, descriptivo e interpretativo (Cohen et al., 2018). Se compone de un estudio de casos múltiples que involucra los tratamientos presentes en la construcción de la definición de la integral definida considerando el registro algebraico, gráfico, tabular y figural. La muestra utilizada fue no aleatoria (con selección intencionada) y estuvo formada por 36 estudiantes, con un promedio de edad de 20 años, quienes cursaban el tercer semestre de la carrera de Ingeniería en Agronomía, en una universidad pública de Chile.

La actividad de investigación desarrollada tiene la intencionalidad de conocer los tipos de representaciones que realizan los ingenieros en formación en un registro algebraico, gráfico y tabular al desarrollar un problema en contexto sobre el área de un sembrado (problema relacionado con el quehacer de un ingeniero agrónomo). Dicha actividad se trabajó en cinco sesiones de clases, cada una de 90 minutos. La investigación que se presenta en este documento (Cohen et al., 2018) corresponde a un estudio de caso, utilizando una metodología de aprendizaje cooperativo (Jhonson y Jhonson, 2014) a través de la conformación de grupos de cuatro integrantes, quienes realizan diversos cambios de registro de representación semiótica. En la Tabla 1 se presenta la actividad de investigación.

Tabla 1. Actividad de investigación desarrollada por los estudiantes

Considerar un cultivo que genere una cosecha considerando las siguientes instrucciones:	
a)	Escoger una función $y = f(x)$, definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ (cuya unidad sea el metro) y el eje horizontal que llamaremos eje X, que simule la superficie de cultivo. El valor de esta superficie debe oscilar entre los 100 m^2 y 500 m^2.
b)	Obtener el valor de la superficie limitada a través de la definición de la integral definida (suma de Riemann). Considere que la superficie debe ser particionada con la mayor cantidad de rectángulos posibles, sin alterar la distancia mínima que debe tener cada cultivo al momento de su crecimiento.
c)	Investigar, a través de evidencia bibliográfica, la distancia mínima a la que debe estar cada cultivo con respecto a otro para que se genere una cosecha de productividad aceptable.
d)	Representar lo estudiado en una superficie terrenal, en la cual se identifiquen los objetos matemáticos estudiados, y reflexionar acerca de lo representado.

A continuación, se describen las fases que se desarrollaron en esta actividad de investigación.

3.1. Fase 1

Se inicia con la reflexión de la definición de integral definida como el área de una región del plano limitada por una curva, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, estableciendo los fundamentos necesarios para motivar geométricamente dicha definición; esto con el fin de incentivar la idea intuitiva de que el área de una figura geométrica es la medida que, en alguna forma, proporciona el tamaño de la región encerrada por la figura. A esta idea se le acompaña el análisis de particiones en un intervalo cerrado $[a, b]$.

3.2. Fase 2

Los estudiantes definen la función involucrada en la construcción de la superficie para el cultivo, haciendo uso del procedimiento indicado en la Tabla 2.

Tabla 2. Procedimiento para construir la definición de integral definida

Pasos	Descripción
1	Definir una función de variable real y=f(x), mostrando su dominio y recorrido.
2	Establecer parámetros a y b dentro del dominio para limitar un subconjunto $[a, b]$.
3	Determinar Δx entre cada elemento $x_{i-1}, x_i \in [a, b]$ en relación con la distancia que debe tener cada hilera del cultivo. $$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$
4	A través de Δx, determinar la cantidad de particiones n que tendrá la superficie determinada por las hileras del cultivo.
5	Por medio de la función definida $y = f(x)$, determinar $f(\varepsilon_i)$
6	Por medio de la cantidad de particiones de la superficie a cultivar, determinar la suma: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$
7	Expresar la superficie a través de la definición de integral definida, la cual se desea calcular $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$
8	Por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), determina el valor de la superficie limitada por la función $y = f(x)$, el eje X y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. $$A(S) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

3.3. Fase 3

Los estudiantes realizan la modelación de la construcción de la superficie para el cultivo con el software GeoGebra, haciendo uso del procedimiento indicado en la Tabla 3.

Tello, J. H., Arredondo, E. H. y García-García, J. I. (2023). Tratamiento y conversión de registro de representación de la integral definida por ingenieros en formación. *Areté. Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela*. 9 (17), 63 – 77. https://doi.org/10.55560/arete.2023.17.9.3

Tabla 3. Procedimiento para construir la definición de integral definida

Pasos	Descripción
1	Modelar la función de variable real $y = f(x)$, establecida en la Fase 2.
2	Determinar el valor de la superficie limitada por la función $y = f(x)$, el eje X y las rectas verticales $x = a$, $x = b$, por medio del comando: Integral(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)
3	Determinar el valor de la suma del área de los rectángulos inferiores, por medio del comando: SumaInferior(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>, <Número de rectángulos>)
4	Determinar el valor de la suma del área de los rectángulos superiores, por medio del comando: SumaSuperior(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>, <Número de rectángulos>)

3.4. Fase 4

Aproximar el área de la superficie, establecida en la Fase 2, por medio de la suma de áreas de rectángulos con el propósito de particionar la base considerando el número de hileras del cultivo, haciendo uso del procedimiento indicado en la Tabla 4.

Tabla 4. Procedimiento para aproximar el área de la superficie del cultivo

Pasos	Descripción
1	Determinar la cantidad $[x_{i-1}, x_i]$ de las bases de hileras (rectángulos) en la superficie definida; para esto se utiliza $\triangle x = \frac{b-a}{n}$
2	Determinar para cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ su punto medio, definido por $\varepsilon_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$
3	Determinar la altura definida por $f(\varepsilon_i)$ de cada rectángulo con base en $[x_{i-1}, x_i]$
4	Determinar el área de cada rectángulo definido en $[x_{i-1}, x_i]$, mediante la expresión $f(\varepsilon_i)\Delta x$
5	Determinar el valor de la suma total de las áreas de cada rectángulo definido en $[x_{i-1}, x_i]$, mediante la expresión $\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x$

3.5. Fase 5

Finalmente, se procede a representar de forma figural la superficie limitada por la función $y = f(x)$, el eje X y el intervalo $[a, b]$.

En la siguiente sección se evidencian elementos de cada una de estas fases. Cabe señalar que cada fase se desarrolló en una sesión de clase.

4. Resultados y Discusión

Enseguida se dan a conocer los resultados y discusión en cada una de fases que se desarrollaron en la actividad de investigación propuesta; estos se presentan en función de los casos que identificamos, los cuales contemplan el cambio de registro de representación; es decir, el tipo de movilización de las representaciones semióticas que predominaron por parte de los estudiantes. Como se señaló anteriormente, en este artículo se muestra un estudio de caso correspondiente a un equipo de trabajo de cuatro estudiantes.

En la Fase 1, los estudiantes reflexionan acerca del conocimiento matemático necesario para la definición y aplicación de la integral definida, así como de la idea de que el área de una figura geométrica está vinculada con el área de un cultivo. La reflexión se basa en la definición del área de una región plana que involucra el concepto de integral definida; de acuerdo con Leithold (1994), si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$, para todo valor de x en $[a, b]$, y la región R está limitada por la curva f, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, entonces la medida A del área de dicha región R está dada por la expresión:

$$A = S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x$$

Donde S_n representa la suma de las áreas de los n rectángulos inscritos en la región R.

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x + f(\varepsilon_2)\Delta x + \cdots + f(\varepsilon_i)\Delta x + \cdots + f(\varepsilon_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x$$

En concreto, la intencionalidad era definir el área de una región plana a partir de la noción de suma infinita de rectángulos inscritos, con fundamento en la suma de Riemman. Para esto, el equipo de trabajo fija un valor para n en relación con la distancia de Δx, que representa cada hilera del cultivo, basándose en S_n. Como puede observarse, se hace uso de tratamiento desde RRS de lenguaje natural y RRS algebraico; además, la conversión no es congruente entre el lenguaje natural y el algebraico. Lo anterior se relaciona con lo expuesto por Rasslan y Tall (2002) y Kartika (2019), quienes señalan que los estudiantes tienen una comprensión no idónea y/o desconocida de la definición de integral definida, donde se puede desviar del concepto formal y dar existencia sin uso de una razón lógica.

Durante la Fase 2, los estudiantes desarrollaron el uso de la representación semiótica de carácter algebraico para plantear un caso particular de la integral definida, como se puede observar en la Figura 1. El equipo define una función raíz, $y = \sqrt{10x + 8}$, identificando el dominio y recorrido en forma natural. Después, realizan una restricción del dominio por medio del intervalo $[30, 50]$, esta decisión recae en la cantidad de hileras que se obtendrán cuando establecieran Δx, en cuyo caso fue de 20 hileras de cultivo. En esta parte de la actividad se puede observar un uso correcto del registro, aunque limitado para un caso particular por la función $y = f(x)$, el eje X y las rectas verticales $x = a$, $x = b$.

Tello, J. H., Arredondo, E. H. y García-García, J. I. (2023). Tratamiento y conversión de registro de representación de la integral definida por ingenieros en formación. *Areté. Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela*. 9 (17), 63 – 77. https://doi.org/10.55560/arete.2023.17.9.3

1.-Define una función de variable real $y = f(x)$, mostrando su dominio y recorrido.

$y = f(x) =\quad f(x) = \sqrt{10x + 8}$

Dominio = **[-0.8 , ∞⁺)**

Recorrido =**[0, ∞⁺)**

2.- Establece parámetros a y b dentro del dominio para limitar un subconjunto $[a, b]$

a= 30

b=50

[30,50]

3.- Determina la distancia entre cada elemento $x_{i-1}, x_i \in [a, b]$

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \Delta x = \frac{50-30}{n} = \frac{20}{n}$

4.- Determina el conjunto de particiones P del intervalo $[a, b]$.

$\mathrm{P} = \{30\ ,\ 30 + \frac{20}{n}\ ,\ 30 + 2 \cdot \frac{20}{n} \ldots,\ \mathbf{30 + i} \cdot \frac{\mathbf{20}}{n}\ ,\ 30 + \mathrm{n} \cdot \frac{20}{n}\ \}$

5.- Por medio de la función definida $y = f(x)$, determina $f(\varepsilon_i)$

$f(\varepsilon_i) = 30 + \mathrm{i}\,\frac{20}{n} = 30 + \frac{20i}{n}$

6.- Expresa a través de la definición de integral definida la superficie el cual se desea calcular.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x$$

$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{i=30}^{20} \sqrt{10\left(30 + \frac{20i}{n}\right) + 8}$

$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{i=30}^{20} \sqrt{308 + \frac{200i}{n}}$

A= $\lim_{n\to\infty} \Sigma_{i=30}^{20} \sqrt{308 + \frac{200i}{n}} \cdot \frac{20}{n}$

Figura 1: Representación algebraica desarrollada por los estudiantes.

En concreto, en la Figura 1 se manifiesta el uso del RRS numérico y del RRS algebraico, y se hace una conversión del numérico al algebraico. Se observa que la expresión final, que representa el área de la superficie por medio de la integral definida, no se encuentra correcta desde el ámbito de la sumatoria. Lo anterior refleja un conflicto en el proceso mental del estudiante al momento de comprender la integral definida. De hecho, en Rasslan y Tall (2002) se analiza los esquemas cognitivos de un grupo de estudiantes al momento de establecer la integral definida, donde la mayoría de ellos no logran aprender lo que hacen, haciendo este proceso perjudicial para cursos posteriores en la universidad.

Durante la Fase 3, los estudiantes modelaron lo desarrollado en la Fase 2 con GeoGebra, esto a partir de introducir comandos en el software, y con ello determinar la región limitada, su área y su aproximación por rectángulos. En concreto, se realiza una articulación entre registros, pasando de un registro algebraico a uno gráfico. La medición semiótica entre estos registros fue asumida por los comandos del software, es decir, los comandos permitieron apoyar la conversión entre registros.

En la Figura 2 se observa que el tratamiento gráfico del área limitada por la función $y = \sqrt{10x + 8}$ y el eje X en el intervalo $[30,50]$; con la propuesta de intervalo desarrollada por el equipo de trabajo se obtiene un dato particular para la superficie (402.96 m^2). En esta fase de la actividad, el software GeoGebra entrega en una misma pantalla los tres RRS: el numérico, el gráfico y el algebraico. La interactividad de la pantalla apoya a la conversión del RRS algebraico al RRS numérico, los cuales cobran sentido y significado a partir del RRS gráfico (figural).

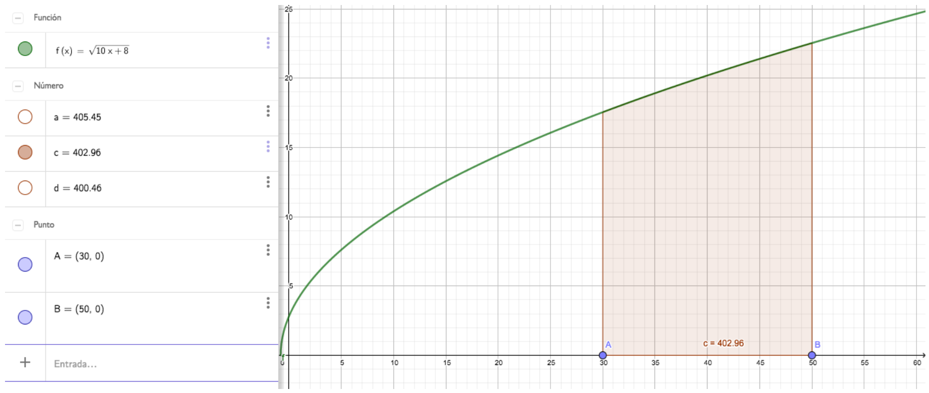

Figura 2: Representación gráfica desarrollada por los estudiantes.

Sin embargo, se identifica que el equipo de trabajo no realiza los pasos 3 y 4 de la Fase 3, es decir, la suma del área de los rectángulos inferiores y superiores. Esto se debe a una dificultad con la apropiación de la herramienta y de los RRS. Si bien el software GeoGebra les proporciona una serie de registros y la conversión de estos, los estudiantes no pueden hacer un tratamiento con estos registros que les permita desarrollar los pasos 3 y 4; lo anterior pone de manifiesto las dificultades en el uso de problemas en un contexto real utilizando la tecnología (Kohen y Orenstein, 2021). Es decir, el que se tengan varios registros en una pantalla no garantiza que el estudiante pueda hacer un tratamiento de ellos, esto si no entiende las representaciones que ahí se están movilizando.

En la Fase 3 se destacan los pasos del procedimiento para modelar la integral definida en GeoGebra, tal como establecer parámetros para limitar el área, un hecho importante para las representaciones gráficas de este concepto (Jones, 2018). Por otro lado, Kohen y Orenstein (2021) ponen de manifiesto el uso de problemas en un contexto real utilizando la tecnología.

En la Fase 4, los estudiantes hacen uso de un registro tabular con el propósito de realizar una aproximación más cercana al área del cultivo, a partir de la función $y = \sqrt{10x+8}$ en el intervalo $[30,50]$. Para esto, el equipo de trabajo utiliza 20 rectángulos (relacionados con 20 hileras de cultivo) y establece elegir ε_i como el punto medio de cada subintervalo (rectángulo), obteniendo un área de 402.14 m^2. En la Figura 3 se muestra el registro tabular construido por el equipo de trabajo.

x_0, x_1	$\mathcal{E}_i$	↘	$F(\mathcal{E}_i)$	$F(\mathcal{E}_i) \times \Delta x$	
30 - 31	$\frac{30-31}{2}$	f(30.5)	17,69	$\frac{353,8}{n}$	
31 – 32	$\frac{31-32}{2}$	f(31.5)	17,97	$\frac{359,4}{n}$	
32 – 33	$\frac{32-33}{2}$	f(32.5)	18,24	$\frac{364,8}{n}$	
33 – 34	$\frac{33-34}{2}$	f(33.5)	18,52	$\frac{370,4}{n}$	
34 – 35	$\frac{34-35}{2}$	f(34.5)	18,78	$\frac{375,6}{n}$	Σ
35 – 36	$\frac{35-36}{2}$	f(35.5)	19,05	$\frac{381}{n}$	
36 – 37	$\frac{36-37}{2}$	f(36.5)	19,31	$\frac{386.2}{n}$	
37 – 38	$\frac{37-38}{2}$	f(37.5)	19,57	$\frac{391,4}{n}$	
38 – 39	$\frac{38-39}{2}$	f(38.5)	19,82	$\frac{396,4}{n}$	
39 – 40	$\frac{39-40}{2}$	f(39.5)	20,07	$\frac{401,4}{n}$	
40 – 41	$\frac{40-41}{2}$	f(40.5)	20,32	$\frac{406.4}{n}$	
41 – 42	$\frac{41-42}{2}$	f(41.5)	20,56	$\frac{411,2}{n}$	
42 – 43	$\frac{42-43}{2}$	f(42.5)	20,80	$\frac{416}{n}$	
43- 44	$\frac{43-44}{2}$	f(43.5)	21,04	$\frac{420,8}{n}$	
44 – 45	$\frac{44-45}{2}$	f(44.5)	21,28	$\frac{425,6}{n}$	
45 – 46	$\frac{45-46}{2}$	f(45.5)	21,51	$\frac{430,2}{n}$	$\frac{8042,8}{n}$
46 – 47	$\frac{46-47}{2}$	f(46.5)	21.74	$\frac{434,2}{n}$	
47 – 48	$\frac{47-48}{2}$	f(47.5)	21,97	$\frac{439,4}{n}$	
48 – 49	$\frac{48-49}{2}$	f(48.5)	22,20	$\frac{444}{n}$	$\frac{8042,8}{20}$
49 – 50	$\frac{49-50}{2}$	f(49.5)	22,42	$\frac{448,4}{n}$	A = 402.14

Figura 3: Representación tabular desarrollada por los estudiantes.

El tratamiento en el registro tabular de la Fase 4 marca un referente importante (Peña et al., 2019), puesto que muestra la utilidad del uso del concepto de integración numérica como alternativa para el cálculo de integrales; en este caso, el uso de datos tabulados para la aproximación del área de la superficie R en el contexto de un área de cultivo. Si bien el equipo de trabajo logra desarrollar la actividad con este registro, no deja evidencia de conexiones entre lo desarrollado en esta fase con las anteriores.

Finalmente, en la Fase 5, para el cierre de la actividad, el equipo de trabajo hace uso de un registro figural (superposición gráfica) donde se puede observar una conversión entre el registro tabular al figural; es decir, se representa de forma figural el área de la superficie de cultivo limitada por la función $y = \sqrt{10x + 8}$ y el eje X en el intervalo $[30,50]$. En la Figura 4 se muestra el RRS figural desarrollado por el equipo de trabajo en un cerro de la ciudad de Arica, Chile.

Figura 3: Representación figural desarrollada por los estudiantes.

Tello, J. H., Arredondo, E. H. y García-García, J. I. (2023). Tratamiento y conversión de registro de representación de la integral definida por ingenieros en formación. *Areté. Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela.* 9 (17), 63 – 77. https://doi.org/10.55560/arete.2023.17.9.3

Si bien la intención de los estudiantes es contextualizar el problema, al superponer el gráfico en el terreno real, la comprensión del área del cultivo queda condicionada a la forma prototípica en la que se organiza la información.

5. Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos, se evidencia como el tratamiento y conversión de diversos registros de representación semiótica permitió a los estudiantes conocer distintos acercamientos sobre el concepto y aplicación de la integral definida; así como herramientas para resolver casos particulares. En ese sentido, el uso de varios registros (algebraico, gráfico, tabular y figural) y sus conversiones permitió a los estudiantes comprender de mejor manera el valor del área de la región haciendo uso del registro tabular; esto al establecer la estimación del área desde la perspectiva de la cantidad de hileras de cultivo.

La comprensión de la integral definida, por parte de los estudiantes de ingeniería, requiere del uso de distintos registros de representación, así como el tratamiento y la conversión entre estos. En particular, el equipo de estudiantes de ingeniería hace la identificación de una función que se ajusta al terreno descrito para su actividad, la cual le permite hacer tratamiento entre distintos registros de representación y que en este el software GeoGebra le permite hacer una coordinación entre registros, pero al desarrollar una coordinación con el contexto le pone como desafío al estudiante reconsiderar sus resultados y tomar decisiones.

En concreto, el software GeoGebra le permite al estudiantado hacer una conversión entre registros, en particular, del registro algebraico al registro gráfico; sin embargo, este proceso no es inmediato, requiere que el estudiante tenga una comprensión del registro de representación que se usa. Asimismo, para los ingenieros en formación, el contexto resulta un elemento vital para la toma de decisiones; por ejemplo, al cuestionarse sobre qué intervalo sería el adecuado basándose en el ancho de la hilera de cultivo.

Agradecimientos

Este trabajo es parte del Proyecto Educación No. 4758-22 financiado por la Dirección de Investigación, Postgrado y Transferencia Tecnológica de la Universidad de Tarapacá, Chile.

Referencias

Aranda, C., y Callejo, M. L. (2017). Construcción de la Función Integral y Razonamiento Covariacional: Dos Estudios de Casos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(58), 777-798. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a13

Bajracharya, R. R., Wemyss, T. M., y Thompson, J. R. (2012, febrero). *Student interpretation of the signs of definite integrals using graphical representations* [ponencia]. AIP Conference Proceedings (Vol. 1413, No. 1, pp. 111-114). American Institute of Physics. https://doi.org/10.1063/1.3680006

Camacho, M., Depool, R., y Garbín, S. (2008). Integral definida en diversos contextos: Un estudio de casos. *Educación matemática*, *20*(3), 33-57. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol20/3/vol20-3-03_REM_20-2.pdf

Carli, M., Lippiello, S., Pantano, O., Perona, M., y Tormen, G. (2020). Testing students ability to use derivatives, integrals, and vectors in a purely mathematical context and in a physical context. *Physical Review Physics Education Research*, *16*(1), 010111. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.010111

Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352-378. https://doi.org/10.2307/4149958

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8ª ed.). Routledge.

Depool, R. (2005). La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS). *Números*, *62*, 3-31. http://sinewton.es/revista_numeros/062/

Dominguez, M., Barniol, P., y Zavala, G. (2019). Evaluación del entendimiento gráfico de derivada e integral definida mediante un examen en castellano de opción múltiple. *Formación Universitaria*, *12*(6), 41-56. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062019000600041

Dreyfus, T., Kouropatov, A., y Ron, G. (2021). Research as a resource in a high-school calculus curriculum. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(3), 679-693. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01236-3

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics, Educational *Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131. http://www.jstor.org/stable/25472062

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical way of Thinking-The Registers of Semiotic Representations*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, Á., y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de investigación en educación matemática*, (10), 91-110. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.144

Jones, S. R. (2018). Prototype images in mathematics education: The case of the graphical representation of the definite integral. *Educational Studies in Mathematics*, *97*(3), 215-234. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9794-z

Johnson, D., y Johnson, R. (2014). La evaluación en el aprendizaje cooperativo: cómo mejorar la evaluación individual a través del grupo. *España: Biblioteca Innovación Educativa*.

Kartika, C., Umi, I., Machromah, I., Sri, N., y Zakiyyah, Z. (2019, 7 de agosto). *The Existence of The Definite Integral: Students' Understanding* [ponencia]. Proceedings of the 4th

Progressive and Fun Education International Conference. http://dx.doi.org/10.4108/eai.7-8-2019.2289033

Kohen, Z., & Orenstein, D. (2021). Mathematical modeling of tech-related real-world problems for secondary school-level mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *107*, 71-91. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10020-1

Leithold, L. (1994). *El Cálculo* (7ª ed.) Oxford University Press.

Martínez-Miraval, M. A., y García-Cuéllar, D. J. (2020). Estudio de las aprehensiones en el registro gráfico y génesis instrumental de la integral definida. *Formación universitaria*, *13*(5), 177-190. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062020000500177

Peña, C. A., Ramírez-Sánchez, M., y Rivas-Trujillo, E. (2019). La integración numérica en la integral definida: caso de estudio. *Espacios, 40*(19), 23-30. https://revistaespacios.com/a19v40n19/19401923.html

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W-M., y Kadunz, G. (2016). *Semiotic in mathematics education*. Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31370-2

Rasslan, S., y Tall, D. (2002, julio). *Definitions and images for the definite integral concept* [ponencia]. Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 89-96).

Rodríguez, R. (2017). Repensando la enseñanza de las matemáticas para futuros ingenieros: actualidades y desafíos. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH, 8*(15), 69-85.

Serhan, D. (2015). Students' understanding of the definite integral concept. *International Journal of Research in Education and Science*, *1*(1), 84-88. https://www.ijres.net/index.php/ijres/article/view/20

Smith, J., y Thompson, P. W. (2007). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. En J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95-132). Erlbaum.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., y Laborde, C. (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education. Kluwer International Handbooks of Education* (vol 4, pp. 289-325). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_9

Tallman, M. A., Reed, Z., Oehrtman, M., y Carlson, M. P. (2021). What meanings are assessed in collegiate calculus in the United States? *ZDM–Mathematics Education*, *53*(3), 577-589. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01212-3

Tatar, E., y Zengin, Y. (2016). Conceptual understanding of definite integral with Geogebra. *Computers in the Schools*, *33*(2), 120-132. https://doi.org/10.1080/07380569.2016.1177480

Jorge H. Tello. Académico del Departamento de Matemática de la Universidad de Tarapacá, Arica, Chile. Magíster en Matemática, por la Universidad de Valparaíso, Chile, y Magíster en Didáctica de la Matemática por la Universidad Católica de Valparaíso. Actualmente cursa el Doctorado en Educación de la Universidad Nacional de Educación a Distancia, España.

Ha participado en diversos coloquios y congresos de matemática educativa, por mencionar: Octavo Congreso Internacional de Matemática Educativa (septiembre, 2022) y XXX Congreso de Matemática Capricornio (agosto, 2022). Ha seguido la línea de investigación en Didáctica del Cálculo.

Elizabeth H. Arredondo. Profesora-investigadora del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile. Doctora en Ciencias, Especialidad en Matemática Educativa, por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México. Sus líneas de investigación son Didácticas de los diversos marcos matemáticos y Formación de profesores. Entre sus artículos recientes se encuentran: "Diseño de un entorno de aprendizaje del saber docente acerca de las construcciones euclidianas con GeoGebra" en la revista Educación Matemática (2022) y "Representaciones estadísticas a temprana edad: una aproximación desde los libros de texto de Chile y México" en la revista Bolema (2022).

Jaime I. García-García. Profesor-investigador del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile. Es Doctor en Ciencias, Especialidad en Matemática Educativa, por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México. Líneas de investigación: Didácticas de los diversos marcos matemáticos y Análisis de libros de texto. Entre sus publicaciones recientes se encuentran: "The Binomial Distribution: Historical Origin and Evolution of Its Problem Situations" en la revista Mathematics (2022) y "Análisis ontosemiótico de tareas que involucran gráficos estadísticos en libros de texto mexicanos de Educación Primaria" en la revista Avances de Investigación en Educación Matemática (2022).

Tello, J. H., Arredondo, E. H. y García-García, J. I. (2023). Tratamiento y conversión de registro de representación de la integral definida por ingenieros en formación. *Areté. Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela*. 9 (17), 63 – 77. https://doi.org/10.55560/arete.2023.17.9.3