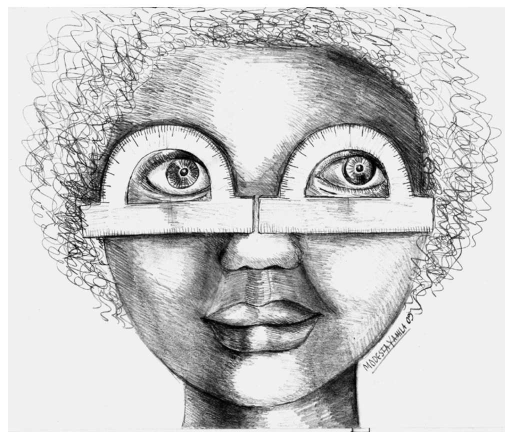
LA CONCEPCIÓN DE LA SIMETRÍA EN ESTUDIANTES COMO UN OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO PARA EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

THE CONCEPTION SYMMETRY IN STUDENTS AS EPISTEMOLOGICAL OBSTACLE FOR LEARNING GEOMETRY

A CONCEPÇÃO DA SIMETRIA EM ALUNOS COMO OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO PARA APRENDER GEOMETRIA

HÉCTOR JOSÉ BOHORQUEZ*
hectorbohorquez@gmail.com
LISSETTE FRANCHI BOSCÁN**
lissettefrancho@gmail.com
ANA ISMENIA HERNÁNDEZ***
anaismeniahernandez@gmail.com
SILVANA SALCEDO****
silsadc@hotmail.com
RAFAEL MORÁN*****
rmoran100@gmail.com
Universidad del Zulia
Maracaibo, Edo. Zulia
Venezuela



Fecha de recepción: 17 de enero de 2008
Fecha de revisión: 26 de agosto de 2008
Fecha de aceptación: 1 de septiembre de 2008

Resumen

En esta investigación se analiza la constitución en obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la geometría de la concepción puesta de manifiesto por los alumnos acerca de la simetría, referida a que es siempre preferible el uso de figuras simétricas en el análisis de problemas geométricos. Se fundamenta en el concepto de obstáculo epistemológico de Bachelard (1994) y en la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997; Sierpinska, 1992). El estudio fue no experimental, transversal y descriptivo. Se empleó una muestra aleatoria de 30 alumnos cursantes de Geometría en la Facultad de Ingeniería de L.U.Z. Se utilizó la observación indirecta y externa, y la entrevista semiestructurada individual. Se concluyó la presencia generalizada en la población del obstáculo estudiado.

Palabras clave: obstáculo epistemológico, error, simetría, geometría

Abstract

In this research the constitution in epistemological obstacle for learning the conception of geometry is analyzed as manifested by students regarding symmetry, referred as always preferable to use symmetrical figures in the analysis of geometrical problems. It is based on Bachelard's epistemological obstacle concept (1994) and the Theory of Didactical Situations (Brousseau, 1997; Sierpinska, 1992). The study was non-experimental, transversal and descriptive. A random sample of 30 students from the Geometry subject at the Faculty of Engineering at L.U.Z. was used. Indirect and external observation was used as well as individual semi-structured interviews. The generalized presence of the obstacle studied in the sample was concluded.

***Key words**: epistemological obstacle, error, symmetry, geometry.*

Resumo

Nesta pesquisa se analisa a constituição em obstáculo epistemológico para aprender geometria da concepção evidenciada pelos alunos cobre a simetria, referida a que sempre é preferível o uso de figuras simétricas no análise de problemas geométricos. Tem como base o conceito de obstáculo epistemológico de Bachelard (1994) e na Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1997; Sierpinska, 1992). O estudo foi não experimental, transversal e descritivo. Foi usada uma amostra aleatória de 30 alunos de Geometria da Faculdade de Engenharia de L.U.Z. Foi usada a observação indireta e externa, e a entrevista semi-estruturada individual. A conclusão foi a presença generalizada na população do obstáculo estudado.

***Palavras chave**: obstáculo epistemológico, erro, simetria, geometria*

EDUCERE • Investigación arbitrada • ISSN: 1316 – 4910 • Año 13, Nº 45 • Abril – Mayo – Junio, 2009 • 477 – 489

Hoy en día existe consenso en admitir que cuando un alumno se enfrenta ante un nuevo concepto, su mente, lejos de ser una tabla rasa, lleva consigo un cúmulo de conocimientos y experiencias previas que interactúan con y para la adquisición del nuevo conocimiento (Ausubel, Novak y Hanesian, 1976/2001; Carretero, 1996; Flórez, 1994). Algunos de esos conocimientos o concepciones previas pueden, sin embargo, lejos de ayudar, dificultar la adquisición del nuevo conocimiento, por lo que resulta importante estudiar tales concepciones en los alumnos y su posible constitución en auténticos obstáculos espistemológicos que, esencialmente, consisten en viejos conocimientos, útiles dentro de un cierto dominio durante algún tiempo, pero que en un momento dado, ante un nuevo conocimiento, se revelan contradictorios, inadaptados y falsos, obrando en consecuencia como un impedimento para adquirirlo.

Por su parte, uno de los conceptos más antiguos no sólo dentro del campo de la estética sino dentro de innumerables áreas del conocimiento y del quehacer humano en general, es el de la simetría.

El concepto de simetría puede entenderse desde diferentes perspectivas, bien como la asociación intuitiva con la idea de proporción, hasta una precisa definición matemática que la refiere como invariabilidad de una configuración de elementos bajo un grupo de transformaciones automórficas (Weyl, 1989). A los efectos de esta investigación, no obstante, el término se empleará específicamente para hacer referencia a los sencillos conceptos simetría axial y simetría central en el plano.

Ha gozado la simetría, desde siempre, de una suerte de encanto natural para ganar adeptos a lo largo de los más diversos momentos históricos y de las más disímiles culturas que la han vinculado íntimamente con orden, belleza y perfección.

La sola observación de nuestro entorno natural nos ofrece elementos para entender tal vinculación. La inmensa mayoría de los diseños de la naturaleza son simétricos, de modo que da la impresión de que la evolución y la simetría conforman un binomio muy exitoso y que, tal vez por ello, lo encontramos ordenado, bello, eficiente.

Ya Platón, Aristóteles y Plotino identificaron lo bello con lo bueno, al igual que lo hizo luego la filosofía inglesa del sentimiento moral. La escuela eleática, encabezada por el gran Parménides, sostiene la unidad del cosmos y afirma que el ser en general, no el ser en otro, sino el ser en sí, es solamente uno, sin cambio y sin movimiento, se encuentra en perfecto reposo y rígido, semejante a la forma de una bien redondeada esfera igual y uniformemente limitada (Hirschberger, citado por Botero, 2001), en una clara vinculación de la simetría con el ser —el ser parmenídico— y la perfección.

El gran arquitecto griego Vitrubio (70 a.C.-25 a.C.) señalaba en su obra *Los diez libros de arquitectura* que el diseño de un edificio depende de la simetría, cuyos principios deben ser los más cuidadosamente observados por el arquitecto, que de la proporción resultan los principios de simetría y que sin simetría y proporción, sin una relación precisa entre sus elementos, como en el caso de los hombres bien formados, no puede haber principios en el diseño (Vitruvius, 1914).

La simetría, sin embargo, trasciende el hecho meramente estético y presenta una dimensión de orden práctico que cataliza la atracción que sobre nosotros ejerce. Ciertamente son incontables las situaciones dentro de las cuales se ha hecho uso de la simetría, bien para conseguir explicaciones a ciertos fenómenos, bien para modelar otros, bien para realizar diseños de todo tipo.

Pero quizás el terreno más fértil para la simetría lo conseguimos de forma natural en la geometría. El solo término geometría nos lleva casi de inmediato al concepto de simetría, a imágenes simétricas, armónicas. Comúnmente se consideran como figuras geométricas o como diseños geométricos únicamente aquellos que presentan un cierto orden, una cierta regularidad, un cierto grado de simetría: triángulos, polígonos regulares, círculos, elipses, parábolas, etc., o combinaciones de ellos. Sin embargo, la ciencia geométrica no contempla esas restricciones que pretendemos imponerle. Para la geometría cualquier conjunto de puntos constituye una figura tan geométrica como la más bella y proporcionada estrella de cinco puntas.

No es de extrañar entonces que esa suerte de identificación, natural o aprendida, entre geometría y simetría esté presente en las mentes de quienes se inician en esa hermosa rama de la matemática y, es justo decirlo, en buena parte de quienes luchan por enseñarla. Es una concepción que, para bien o para mal, acompaña al aprendiz.

Incontables problemas geométricos se resuelven haciendo uso de la simetría. Los triángulos isósceles, por ejemplo, gozan de una gran cantidad de propiedades y constituyen un recurso de enorme utilidad en la solución de problemas que involucran no sólo otros tipos de triángulos sino también diferentes figuras como circunferencias, polígonos, elipses, etc. Muchos otros problemas se resuelven mediante movimientos simétricos en el plano, como la simetría central y la simetría axial. En las construcciones geométricas con regla y compás está presente permanentemente la simetría: trazado de circunferencias, mediatrices, bisectrices, etc. La simetría constituye, en fin, una herramienta de invalorable utilidad en la geometría.

Por otra parte, los problemas que involucran figuras simétricas son por lo general más fáciles de resolver que aquellos que se refieren a figuras asimétricas. Este hecho, sumado al atractivo de orden estético a que nos hemos referido, no hace sino incrementar en los alumnos la preferencia por este tipo de figuras.

No obstante, como se sabe, en geometría se busca producir resultados generales, que sean aplicables al mayor número posible de casos. Así por ejemplo, interesa a la geometría enunciar y demostrar proposiciones que sean valederas, aplicables, a todo tipo de triángulo, o a todo tipo de cuadrilátero, y no sólo a un conjunto reducido de ellos. En estas situaciones, la simetría y en particular las figuras simétricas dejan de ser deseables y adecuadas, y comienzan a convertirse en un problema.

Por muy abstracta que podamos o queramos concebir la geometría, siempre, al momento de resolver un problema geométrico, acudimos al lápiz y al papel para dibujar una figura concreta, una figura de análisis, que nos sirva de base o de guía para visualizar la solución. En la medida en que esa figura se adapte lo mejor posible a las condiciones dadas en el problema, en esa misma medida será de mayor ayuda para resolverlo. Si, por el contrario, la figura dibujada obvia alguna de las condiciones dadas o incluye arbitrariamente alguna que no está dada, entonces dejará de ser útil y en cambio nos puede conducir a resultados falaces.

Y es precisamente en este punto cuando pueden presentarse conflictos en quienes se dedican al estudio de la geometría. La preferencia por las figuras simétricas los puede llevar a tomar alguna de ellas como figura base para la solución de un problema, en situaciones para las cuales resulta contraproducente. Así por ejemplo, escoger un triángulo isósceles como figura de análisis para intentar demostrar una propiedad que se supone debe validarse para todo tipo de triángulo —no sólo para los isósceles—, puede conducir arbitrariamente a suponer como dadas ciertas condiciones, como por ejemplo, que el triángulo en cuestión tenga dos ángulos iguales.

La experiencia de los integrantes del equipo de investigación de este estudio como docentes en el área de la geometría indica que muchos de los errores observados en los alumnos pueden tener su origen en este conflicto. La concepción de que las figuras simétricas son bellas, buenas, equilibradas, útiles, eficientes y deseables se contrapone a circunstancias en las cuales debemos prescindir de ellas.

Situaciones como las descritas han sido observadas reiteradamente a lo largo de la experiencia docente de los autores del estudio, llevándolos a madurar la idea de que, en muchos casos, la preferencia por las figuras simétricas actúa como un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la geometría, lo cual condujo a investigar hasta qué punto tal concepción se encontraba generalizada dentro de la población de estudiantes para poder caracterizarla o no como un auténtico obstáculo epistemológico presente en la misma. Se planteó en consecuencia la siguiente interrogante: *¿Constituye la preferencia por el uso de figuras simétricas un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la geometría que está presente en los alumnos que participan en situaciones de enseñanza-aprendizaje en la cátedra de Geometría de la Facultad de Ingeniería de la Universidad del Zulia?*

Objetivo general

Analizar si la preferencia por las figuras simétricas constituye un obstáculo presente en alumnos que participan en situaciones de enseñanza-aprendizaje en la cátedra de Geometría de la Facultad de Ingeniería de La Universidad del Zulia.

Objetivos específicos

Caracterizar el concepto de simetría como obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la geometría.

Determinar la incidencia del obstáculo de la simetría presente en alumnos que participan en situaciones de enseñanza-aprendizaje en la cátedra de Geometría de la Facultad de Ingeniería de La Universidad del Zulia.

Marco teórico

El término *obstáculo epistemológico* fue utilizado por primera vez en 1938 por el filósofo francés Gaston Bachelard referido al dominio de la ciencia en general y de la Física en particular. Para Bachelard, la ciencia es una actividad autónoma, dependiente sólo de sí misma para establecer sus normas y prácticas. (Marshall, 1999).

El centro de la filosofía de la ciencia de Bachelard, señala Gutting (1989), es su modelo del cambio científico, que se construye alrededor de cuatro categorías epistemológicas: rupturas, obstáculos, perfiles y actos. Bachelard emplea el concepto de *ruptura epistemológica* en dos contextos. Indica que, en primer término, el conocimiento científico se separa del sentido común, e incluso lo contradice, y en segundo término, que las rupturas también ocurren entre dos elaboraciones conceptuales científicas. El término de rupturas, por su parte, sugiere que hay una barrera que debe destruirse. Bachelard introduce así la noción de *obstáculo epistemológico*, entendido como cualquier concepto o método que previene una ruptura epistemológica. La idea de *perfil epistemológico* consiste en un análisis que revela el grado en el cual la comprensión de un concepto por parte del individuo involucra elementos de varios estadios de su desarrollo histórico. Finalmente, el concepto de *acto epistemológico* contrabalancea el de obstáculo y se refiere a los saltos que el genio científico introduce al curso del desarrollo científico.

Se tiene así que, de acuerdo a Bachelard, la ciencia avanza por una especie de dialéctica entre obstáculos y rupturas epistemológicas. Esta dialéctica, sin embargo, no es exclusiva del amplio domino del desarrollo científico. Se reproduce, con sus características particulares, en el proceso de aprendizaje de cualquier conocimiento por parte del individuo. El propio Bachelard (1994) señala que se conoce *en contra* de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza la espiritualización; frente a lo real, lo que cree saberse ofusca lo que debiera saberse. Al mismo tiempo, critica a los docentes de física de su época, haciéndoles ver que el adolescente llega a la clase con conocimientos empíricos ya construidos, y que se trata no tanto de *adquirir* una cultura experimental, como de *cambiar* de cultura experimental (Bachelard, 1973).

Guy Brousseau, retoma el concepto de obstáculo y lo adapta al dominio de la matemática dentro de su teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1997), según la cual el aprendizaje en matemática se adquiere a través de saltos y no de forma continua y son precisamente los obstáculos los que se oponen a tales saltos (Sierpinska, 1992). Es obvia la analogía con las rupturas y los obstáculos de Bachelard.

Un obstáculo, señala Brousseau (1997), se manifiesta por errores, pero errores que no son debidos al azar, sino que son reproducibles y persistentes. Además, los errores cometidos por el mismo sujeto están interconectados por una fuente común: una manera de conocer, una concepción característica, coherente si no correcta, un "conocimiento" antiguo que ha sido exitoso en todo un dominio de acciones. Estos errores no desaparecen completamente de una sola vez; se resisten, persisten, luego reaparecen, se manifiestan mucho tiempo después de que el sujeto ha rechazado el modelo defectuoso de su sistema cognitivo consciente. El obstáculo es de la misma naturaleza del conocimiento, con objetos, relaciones, métodos de aprehensión, predicciones, con evidencias, consecuencias olvidadas, ramificaciones imprevistas, etc. Resistirá el rechazo e intentará adaptarse localmente, modificarse al menor costo, optimarse en un campo reducido, siguiendo un proceso de acomodación.

Sierpinska (1992) explica que la oposición ejercida por los obstáculos al aprendizaje puede ocurrir a nivel de cada individuo, y dichos obstáculos o las dificultades que generan pueden ser muy particulares. No obstante, se debe presentar especial atención a aquellos que no son simples resultados de formas particulares de su enseñanza, ni idiosincrásicos, ni algo que ocurre a una persona o dos, sino que está más extendido, o se ha extendido alguna vez en alguna cultura.

Caracterización del concepto de simetría como obstáculo epistemológico

En este aparte se detallan las características del obstáculo en estudio, que se corresponde con la concepción inferida en los alumnos resumida en la frase:

Es preferible siempre el uso de figuras simétricas en la solución *de problemas geométricos*

Esto lleva a muchos alumnos a restringir —no explícitamente, pero sí en la práctica— el conjunto de las figuras geométricas a sólo aquellas que sean simétricas. Así, cuando por ejemplo se les solicita dentro de un problema demostrar una cierta propiedad para un triángulo cualquiera, optan con frecuencia por hacerlo en triángulos isósceles (o incluso equiláteros), introduciendo así arbitrariamente condiciones no dadas en el enunciado.

Los mismo ocurre también con otras figuras: los cuadriláteros se restringen a trapecios equiláteros (simetría axial), paralelogramos (simetría central) o incluso a rectángulos y cuadrados (simetría axial y central); los polígonos de mayor número de lados (pentágonos, hexágonos, etc.) se conciben como polígonos regulares: lados y ángulos iguales. Difícilmente un alumno al que se le solicite dibujar un pentágono, optará por hacer un trazado como el de la Figura 1,

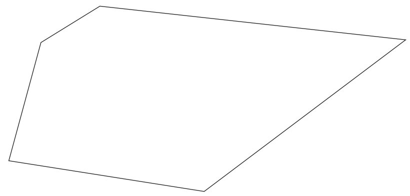


Figura 1. Pentágono irregular

ni mucho menos como el de la Figura 2.

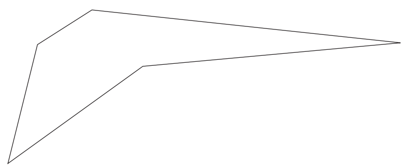


Figura 2. Pentágono irregular cóncavo

Sencillamente tales polígonos no encajan dentro de su concepción de pentágonos. No son simétricos, y el segundo, además, no es convexo.

La vinculación entre simetría y normalidad o, incluso, simetría y perfección, explicada anteriormente, conduce, consciente o inconscientemente, a rechazar en mayor o menor grado todo aquello cuanto no sea simétrico.

Los errores que se derivan de tal concepción se corresponden claramente con los señalados por Franchi y Hernández (2004) como *errores gráficos*, uno de cuyos indicadores es justamente que el alumno dibuja figuras que no se corresponden con el enunciado del problema planteado. Sin embargo, dada su naturaleza y origen, podrían también ubicarse dentro de la categoría de *errores de tecnología* dada por Brousseau (2001) y que se refieren a aquellos que se generan cuando el alumno escoge una técnica inadecuada para resolver un problema.

Así entonces, las figuras geométricas "normales" y en consecuencia "dignas de ser consideradas" serán las simétricas. Para la geometría, por supuesto, no hay figuras normales o anormales, todas son sencillamente figuras, conjuntos de puntos.

Este problema envuelve también, sin embargo, otro aspecto. Trabajar con figuras simétricas tiene su recompensa: es más sencillo. El alumno rápidamente se da cuenta de que es más cómodo trabajar con triángulos isósceles que con escalenos, con rectángulos que con trapecios, y todo ello refuerza su predilección por las figuras simétricas, que se constituyen en una especie de refugio.

Casos extremos de la predilección por la simetría la observamos en el ejemplo siguiente. Se le solicita a un alumno:

Demuestre que en todo triángulo se cumple que el producto de cada lado por su correspondiente altura es constante.

A lo cual responde con un dibujo como el de la Figura 3.

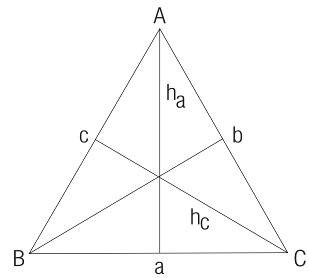


Figura 3. Alturas en un triángulo equilátero

y con el siguiente razonamiento:

Los lados a, b, c son iguales y las alturas de un triángulo equilátero son iguales ($h_a=h_b=h_c$), por lo tanto $a.h_a=b.h_b=c.h_c$.

El alumno se siente conforme con su "demostración" y de hecho se extraña de que se le señale como incorrecta o al menos incompleta.

En otras ocasiones, la simetría conduce a formas más sutiles de errores, como cuando la propia figura le sugiere al alumno ciertas propiedades que no se desprenden del enunciado del problema sino de ella misma, por haber sido dibujada —inadecuadamente— con algún tipo de simetría. En este sentido, son muy comunes errores como el siguiente, en el que habiéndosele solicitado al alumno demostrar alguna propiedad válida para todo triángulo, haga un dibujo como el de la Figura 4.

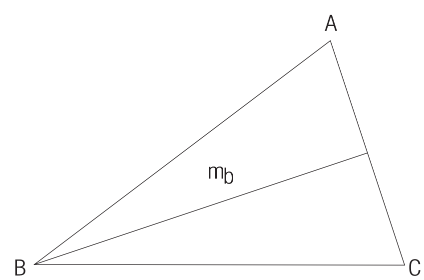


Figura 4. Mediana sobre la base de un triángulo isósceles

y, con referencia a ella, asegure:

La mediana de b es perpendicular al lado $\overline{AC}$ *y por tanto coincide con la altura, por lo cual el triángulo ABC es isósceles, siendo por lo tanto AB=BC ...*

Podríamos afirmar que en cierta forma la figura "traiciona" al alumno, haciéndole creer propiedades que no existen o no están dadas o demostradas. La tendencia natural a dibujar figuras simétricas lo ha

EDUCERE • Investigación arbitrada • ISSN: 1316 – 4910 • Año 13, Nº 45 • Abril – Mayo – Junio, 2009 • 477 – 489

llevado en este caso, sin darse cuenta, a dibujar iguales los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, de modo que, por supuesto, la mediana del lado b resulta perpendicular a $\overline{AC}$. Pero él no se percata de ello e invierte la cadena deductiva, partiendo precisamente del consecuente (la mediana es perpendicular) y deduciendo el antecedente que él inadvertidamente introdujo (el triángulo es isósceles).

La conducta exhibida por los alumnos, movida por su preferencia hacia las figuras simétricas, se resume básicamente en dos tipos de acciones que son el punto de partida de los errores referidos anteriormente, y constituyen los indicadores que sirvieron de base para la elaboración del instrumento de medición y el posterior análisis de los resultados:

Indicadores

1. Dibujar por lo general figuras geométricas con al menos un eje de simetría o un centro de simetría.
2. Apoyarse por lo general en figuras simétricas para la solución de un problema geométrico.

Metodología empleada

La investigación buscó analizar hasta qué punto la concepción de los alumnos acerca de la simetría constituye un obstáculo epistemológico presente en forma generalizada en la comunidad de alumnos que cursan geometría en la Facultad de Ingeniería de LUZ. Así, vista globalmente, la investigación se ubica dentro de una perspectiva empírico-lógica (Castro, 2007), pues busca establecer generalizaciones con validez estadística acerca de la presencia del objeto de estudio en la población. Sin embargo, para cuantificar dicha presencia, se requiere previamente de un proceso de interpretación de las respuestas de los alumnos y de sus justificaciones, que necesariamente involucra al investigador, de modo que ese aspecto del estudio puede ubicarse dentro de una perspectiva interpretativa (Castro, 2007).

Con base en los criterios de Hernández, Fernández y Baptista (1998), se trató de un estudio de tipo *no experimental*, ya que no se pretendió manipular ni controlar variable alguna; *transversal*, pues las mediciones se hicieron en un semestre académico particular; y *descriptivo*, pues se observó, describió, determinó su incidencia y analizó la variable estudiada.

- *La población:* estuvo conformada por los alumnos cursantes de la asignatura Geometría del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ingeniería de LUZ, durante el I semestre de 2007. Su tamaño exacto fue de 1022 alumnos con edades comprendidas entre 16 y 25 años, de ambos sexos, 76% de nuevo ingreso y el resto repitientes, distribuidos en 25 secciones asignadas a 10 profesores de la cátedra.
- *Tamaño de la muestra:* de acuerdo con los criterios dados por Hernández et ál. (1998), se determinó en primer lugar el tamaño de la muestra sin ajuste (n') y luego el tamaño ajustado de la muestra (n) mediante las ecuaciones:

$$n' = \frac{S^2}{V^2} = \frac{p(1-p)}{E^2} \; ; \; n = \frac{n'}{1+\frac{n'}{N}}$$

  Donde: n': tamaño de la muestra sin ajustar; V^2: varianza de la población (se estimó como el cuadrado del error estándar); S^2: varianza de la muestra (se estimó como el producto de la probabilidad de ocurrencia del evento por la probabilidad de no ocurrencia); p: probabilidad de ocurrencia (se tomó p=0.5 por desconocerse a priori la probabilidad de ocurrencia del fenómeno); E: error estándar (se trabajó con un error E=10%); n: tamaño ajustado de la muestra; N: tamaño de la población.
  Sustituyendo y operando se obtuvo: n' = 25 sujetos ; n ≈ 25 sujetos.

- *Selección de la muestra:* se efectuó un *muestreo estratificado proporcional con reemplazo*, para contar en la muestra con alumnos de los 10 docentes de la cátedra, de acuerdo a las pautas dadas por Hernández et ál. (1998), Busot (1991) y Padua (1996). Por cuanto se previó la utilización de dos técnicas de recolección de información, aplicadas en momentos diferentes, lo cual conlleva la posibilidad de la muerte experimental de algunos sujetos de la muestra, para garantizar el número mínimo de alumnos en la muestra (25), se procedió a escoger tres por cada estrato para un total de 30 sujetos, quienes se seleccionaron dentro de cada estrato en forma aleatoria.
- *Muestra:* Durante el proceso de recolección de información no ocurrió la muerte experimental de ningún sujeto, quedando conformada la muestra definitiva por 30 alumnos, escogiéndose 3 para cada uno de los 10 profesores de la cátedra.

Para recabar la información requerida era necesario el empleo de técnicas que permitiesen no sólo medir los errores que los alumnos pudiesen cometer, sino también indagar acerca de cuáles eran las concepciones que les habían conducido a los mismos. Se consideró apropiado por tanto el uso de dos técnicas de recolección de información que, de acuerdo a la tipología dada por Busot (1991), se describen de la siguiente manera: *observación indirecta y externa*, pues se utilizó un instrumento auxiliar sin participación del investigador; y *entrevista de investigación semiestructurada individual*, ya que su finalidad fue recabar información relacionada con las concepciones de los alumnos acerca del obstáculo examinado, el entrevistador anticipaba los tipos de preguntas que debía hacer, aunque no necesariamente las formulaba de la misma forma a todos los entrevistados, y se realizaba a cada sujeto por separado, condición fundamental para evitar la contaminación de las respuestas de unos con otros. Las dos técnicas empleadas se utilizaron una a continuación de la otra: en primer lugar, se aplicaba el cuestionario a cada sujeto de la muestra y luego se le hacía la entrevista. Con la entrevista se perseguían básicamente dos objetivos: corroborar que las respuestas dadas en el cuestionario realmente se correspondiesen con la concepción del alumno y no a una confusión o impulso accidental al momento de responder el cuestionario, por una parte, y por la otra indagar las razones por las cuales el alumno respondía de una u otra forma, más allá de si dicha respuesta era adecuada o no.

Se utilizaron dos instrumentos de medición: un cuestionario y una hoja de registro para las respuestas de la entrevista.

El Cuadro N° 1 muestra el cuestionario utilizado, el cual estuvo conformado por 7 ítems: 4 de respuesta abierta (correspondientes al indicador N° 1) y 3 de selección (para el indicador N° 2), que buscaban constatar la presencia del obstáculo.

El cuestionario empleado debía cumplir ciertas condiciones mínimas de calidad para garantizar el éxito de la investigación, por ello se le determinó su *validez de contenido* y su *confiabilidad*. Con base en las pautas dadas por Busot (1991), Hernández et ál. (1998) y Chávez (1994) se sometió el cuestionario al juicio independiente de cinco expertos en el área quienes consideraron que no necesitaba cambios ni modificaciones. En relación con su confiabilidad, se utilizó la medida de estabilidad o confiabilidad por test–retest (Hernández et ál., 1998). Se siguió el procedimiento descrito por McGuigan (1996) para determinar la confiabilidad estadística del coeficiente de correlación, el cual para las pruebas test y retest resultó estadísticamente confiable, lo cual permitió concluir que el instrumento también lo era. No obstante, como se indicó, los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario fueron contrastados con la entrevista efectuada a cada uno de los sujetos.

Análisis y discusión de resultados

Para efectos de este estudio interesaba cuantificar la presencia del obstáculo en la muestra, pues en la medida en que se encuentre generalizado dentro de la población, será merecedor de mayor cuidado por parte de profesores y alumnos. Sin embargo, por las características mismas de los obstáculos, para su determinación no es suficiente la sola aplicación de un instrumento tipo cuestionario. Se requiere, adicionalmente, corroborar las respuestas de los alumnos y, sobre todo, indagar acerca de las razones que los llevan a responder de una u otra forma. Para ello, fue necesario analizar cualitativamente las justificaciones dadas por los estudiantes durante la entrevista para, en virtud de ello, tomar la decisión de si tales justificaciones eran compatibles o no con la concepción de que siempre es pertinente el uso de figuras simétricas en la solución de cualquier problema geométrico, independientemente del contexto dentro del cual se plantee.

Para recabar y procesar la información que permitiese determinar en qué medida el obstáculo propuesto está presente en la muestra, se adoptaron ciertos criterios y se siguió un procedimiento que, en términos generales, se describe a continuación:

Se aplicó el cuestionario a cada uno de los integrantes de la muestra y luego se les efectuó la entrevista, durante la cual se indagó acerca de las concepciones que habían llevado al alumno a responder de una manera o de otra los ítems del indicador N° 2.

Las respuestas de la entrevista se utilizaron para contrastarlas con las del cuestionario buscando determinar la concepción real del alumno sobre el tópico en cuestión. En este sentido se presentaron diversas situaciones. En la mayoría de los casos el alumno ratificó su respuesta y dio una explicación consistente con la misma (independientemente de que estuviese o no correcta). En otros casos, el alumno optó por cambiar su respuesta argumentando razones acordes con tal decisión. Y en otros casos el alumno manifestó explicaciones discordantes con la respuesta dada en el cuestionario, que realmente no la justificaban, pero que, sin embargo, dejaban clara su concepción, la cual, para efectos de la investigación, prevaleció frente a la respuesta del cuestionario.

En particular para el indicador N° 1, no se solicitó a los alumnos, durante la entrevista, explicación alguna para las respuestas dadas a sus 4 ítems, ya que el dibujo realizado, por sí solo, refleja su tendencia a dibujar o no figuras simétricas, que es justamente lo que se buscaba medir. En lugar de ello, cada dibujo fue evaluado independientemente por dos de los investigadores y otros dos profesores de la cátedra, y se le calificó con 1 (simétrico) cuando al menos tres de los cuatro evaluadores así lo consideraron, y con 0 (no simétrico) en cualquier otro caso.

Como resultado de lo anterior se determinó posteriormente si la concepción evidenciada por el alumno para cada ítem, apuntaba o no hacia la presencia del obstáculo según el indicador correspondiente, asignándole uno de dos posibles valores de acuerdo a los criterios mostrados en el Cuadro N° 2.

Una vez asignado a cada ítem, para cada alumno, su correspondiente valor de 1 ó 0, se procedió a asignarle

EDUCERE • Investigación arbitrada • ISSN: 1316 - 4910 • Año 13, Nº 45 • Abril - Mayo - Junio, 2009 • 477 - 489

a cada indicador un valor similar: 1, si apuntaba hacia la presencia del obstáculo; 0 si no lo hacía. Los criterios para asignar uno u otro valor se resumen en el Cuadro N° 3.

Luego de asignar a cada indicador, para cada alumno, los valores respectivos, se determinaron finalmente los correspondientes al obstáculo estudiado, siguiendo criterios similares a los descritos para los indicadores, resumidos en el Cuadro N° 4.

Se determinaron por último, para cada indicador y para el obstáculo, los porcentajes de alumnos de la muestra que evidenciaban su presencia.

Resultados

En el Cuadro N° 5 se presenta un resumen de la información relacionada con este obstáculo. Allí aparecen los porcentajes de alumnos cuyas valoraciones apuntaron hacia la presencia del obstáculo para cada ítem, para cada indicador y en forma global.

Valoración de los ítems.

La fuerte tendencia de los alumnos a dibujar figuras simétricas quedó evidenciada por los resultados de los 4 ítems del indicador N° 1, con valoraciones del 90, 93, 97 y 100 por ciento respectivamente. Estos resultados son muy reveladores pues el hecho de que casi la totalidad de los sujetos haya optado por dibujar figuras simétricas no puede atribuirse, en una muestra grande como la utilizada, al azar o la casualidad, sino que es fiel reflejo de la preferencia de los alumnos por figuras de este tipo. Obsérvese además que estos porcentajes, aunque con pequeñas diferencias entre uno y otro, fueron incrementándose a medida que aumentaba el número de lados de la figura, desde 3 lados para el ítem N° 1 hasta 6 para el N° 4. Aunque no podamos calificar este resultado como concluyente, en el sentido de asegurar que siempre ocurrirá una distribución como la señalada, pareciera guardar relación con el hecho de que los triángulos, seguidos de los cuadriláteros, son las figuras más conocidas para estos alumnos, pues estudian muchas de sus propiedades y resuelven muchos tipos de ejercicios, de variada naturaleza, dentro de los cuales aparecen involucrados triángulos —principalmente— y cuadriláteros no simétricos. A medida que aumenta el número de lados —en el pentágono y en el hexágono— esa “familiaridad” disminuye y el alumno pareciera refugiarse en la imagen tradicional y cotidiana de estas figuras, que evidentemente es la simétrica.

Los resultados correspondientes al indicador N° 2, ítems 5, 6 y 7, muestran valoraciones del 73, 83 y 90 por ciento respectivamente. Este grupo es incluso más revelador que el anterior pues no consiste en dibujar de manera libre ciertas figuras, dentro de lo cual pudieran estar implícitas preferencias estéticas o de otro tipo, sino que se trata de escoger figuras con un fin muy concreto: resolver un problema geométrico. No obstante, a pesar de ello, a pesar de que se trataba de planteamientos de problemas que requerían necesariamente una solución general, válida para todo tipo de triángulos, cuadriláteros o pentágonos, según el caso, los alumnos mayoritariamente optaron por escoger figuras simétricas, punto de partida muy inconveniente pues se corre el riesgo de que las soluciones se particularicen a triángulos simétricos (isósceles o equiláteros), cuadriláteros simétricos (paralelogramos, rectángulos, etc.), y pentágonos simétricos o incluso regulares. Una vez más queda evidenciado que por encima de los esfuerzos de los docentes por tratar de que sus alumnos no utilicen figuras simétricas —salvo en los casos que así lo ameriten— se impone la presencia del obstáculo que, recurrentemente, conduce al estudiante a emplearlas.

Resulta interesante observar la distribución de los porcentajes para estos tres ítems del indicador N° 2. Nótese que, al igual que en el grupo del indicador N° 1, se incrementan a medida que las figuras involucradas aumentan su número de lados: 73% para el ítem 5 (triángulos), 83% para el ítem 6 (cuadriláteros) y 90% para el ítem 7 (pentágonos). Estos resultados parecieran nuevamente apuntar a que los alumnos tienden más a apoyarse en figuras simétricas a medida que les son menos familiares, pues es claro que la figura más conocida para ellos es el triángulo, seguida de los cuadriláteros y, de más lejos, de los pentágonos. En el caso particular de los cuadriláteros se cuenta con un agravante, como lo es el hecho de que dentro del programa de la asignatura se hace énfasis en el estudio de los paralelogramos —simétricos por naturaleza—, de modo que es relativamente poco el contacto del alumno con cuadriláteros de otro tipo. Sin embargo, no es determinante esta circunstancia para los resultados generales obtenidos, pues con los triángulos ocurre justo lo contrario: se estudian en el curso numerosos teoremas y problemas aplicables a la generalidad de los triángulos, y los docentes insisten en la inconveniencia de utilizar para su solución triángulos isósceles o equiláteros. A pesar de ello, los resultados, como ya se señaló, arrojaron un alto índice del 73% para el caso de los triángulos, lo cual deja claro que más allá de las condiciones —favorables o no— a las cuales fueron expuestos los alumnos durante el curso, lo que prevalece, una vez más, son sus concepciones originales, aquellas adquiridas a lo largo de su vida de estudiante, y que en el caso particular de este obstáculo, consiste en considerar, incluso inconscientemente, que las figuras simétricas de alguna forma gozan de preeminencia sobre las otras, lo cual se manifiesta a través de la fuerte preferencia que experimentan hacia ellas.

Las justificaciones.

Comentario aparte merecen algunas de las justificaciones que los alumnos dieron a las respectivas escogencias que hicieran como respuestas para los ítems 5, 6 y 7 del indicador N° 2 (Cuadro N° 5) y que de alguna forma permitirán conocer mejor ciertos detalles de sus concepciones.

De los 30 alumnos de la muestra, 12 de ellos (40%) manifestaron no tener alguna razón en particular para haber escogido figuras simétricas. Esto pareciera reflejar que no es necesario un acto consciente por parte del sujeto para que el obstáculo actúe y lo induzca a proceder de determinada forma. No se dan en ellos —al menos de manera consciente— razonamientos como el siguiente: *como las figuras simétricas son más importantes (o son más bonitas, o son más prácticas, etc.) y esta figura es simétrica, entonces debo escogerla*. No es así su funcionamiento. En estos alumnos la actuación del obstáculo es mucho más sutil, hasta el punto de que, como se ha visto, ellos mismos no lograban dar una explicación.

Los otros alumnos que acusaron la presencia del obstáculo bajo este indicador (14 en total, 47%) manifestaron variadas justificaciones, algunas de las cuales se comentan a continuación.

El alumno #3 justificó su selección aduciendo: *"porque la vi más simple"* o *"porque era más sencilla"*, lo cual guarda relación con la característica dada para el obstáculo en el sentido de que "recompensa" al alumno pues obviamente resulta más fácil trabajar con figuras simétricas. Explicaciones similares dieron otros alumnos: el #6 justificó haber escogido el triángulo isósceles diciendo *"porque parece isósceles y sería más fácil"*; en tanto que el #11 refirió para los tres ítems: *"porque lo veo más fácil"*.

Por su parte, el Alumno #4 en el ítem 5 escogió el triángulo equilátero y lo justificó diciendo *"porque se ve más claramente"*, respuesta que pareciera guardar también relación con la facilidad que ofrecen las figuras simétricas. Este mismo alumno, en el ítem 6, escogió el paralelogramo, y explicó: *"porque un cuadrilátero no necesariamente es cuadrado"*, respuesta que permite inferir que el alumno intenta evitar caer en casos particulares (el cuadrado) pero recurriendo no a la opción (c) —asimétrica— sino conformándose con otra figura también simétrica, y que por tanto constituye nuevamente un caso particular. Un caso similar es el del alumno #26, quien escogió en el ítem 5 la opción (a) —triángulo isósceles— y luego explicó: *"No hay ninguna razón [para haber escogido la opción (a)]... también pude tomar el (c)"*, dando la impresión de que podía escoger cualquiera, siempre y cuando no fuese la del triángulo escaleno.

Ciertos alumnos seleccionaron figuras asimétricas en algunos de los tres ítems pero su justificación no se apoyaba en criterios de generalidad. Tal es el caso del alumno #9, quien escogió el triángulo escaleno —opción (b)— en el ítem 5. Sin embargo, cuando se le solicitó alguna justificación explicó: *"porque la altura no está dentro del triángulo... además obtengo (sic) el teorema de Pitágoras"*. El hecho de que "la" altura —el alumno hizo referencia a sólo una— no esté dentro del triángulo no guarda relación directa con la generalidad requerida por el ejercicio, pues perfectamente un triángulo puede ser isósceles y obtusángulo simultáneamente, como también puede ocurrir que un triángulo sea escaleno —caso más general— y acutángulo —con todas sus alturas dentro de él. Cuando el alumno explicó que podía "obtener" el teorema de Pitágoras se refería a que podía trazar —de hecho lo hizo— la altura desde uno de los vértices formando un ángulo recto fuera del triángulo (Figura 5).

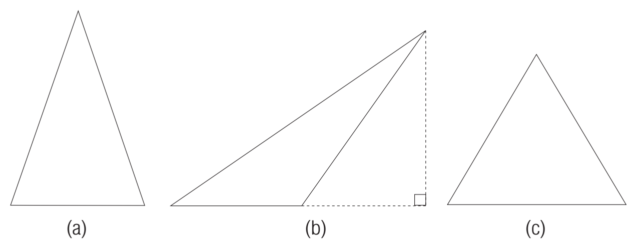


Figura 5. Triángulo isósceles, triángulo obtusángulo y triángulo equilátero

No obstante, podían igualmente hacerse trazados similares en los otros dos triángulos, aunque ciertamente no quedarían las alturas dentro de ellos, condición que el estudiante parecía cuidar.

Este mismo alumno, en el ítem 7, escogió —opción (b)— el pentágono regular. Cuando se le solicitó justificarlo explicó: *"porque para éste hay una fórmula"*. Esta respuesta deja entrever una vinculación tan fuerte hacia la simetría que pareciera conducir al alumno a la convicción de que la fórmula para obtener la suma de los ángulos interiores de un polígono es válida sólo para los polígonos regulares y que por lo tanto no podría aplicarla a los pentágonos de las opciones (a) o (c).

Algunos alumnos aducen abiertamente razones estéticas para su escogencia, como es el caso del alumno #19 que en el ítem 7 escogió el pentágono regular y explicó: *"porque me parece bonita... es la percepción que tengo de un pentágono"*; o del Alumno #14 que en el ítem 5 escogió el triángulo isósceles —opción (a)— explicando luego: *"porque la vi más bonita"*.

Ciertos estudiantes, lejos de percatarse de los inconvenientes de la simetría en la demostración de proposiciones generales, tomaron sus características como razones para su selección. Es el caso por ejemplo del alumno #15 quien habiendo escogido el triángulo equilátero en el ítem 5, argumentó luego: *"porque tiene sus tres lados iguales y tiene su altura en el punto medio*

EDUCERE • Investigación arbitrada • ISSN: 1316 – 4910 • Año 13, Nº 45 • Abril - Mayo - Junio, 2009 • 477 - 489

de cada lado"; o del alumno #24, que escogió en el ítem 7 el pentágono regular y luego explicó: *"porque era un polígono regular y tenía todos sus ángulos iguales... me pareció más conveniente"*. Algo similar ocurrió también con el alumno #29 en referencia al ítem 6, para el cual escogió la opción (a) —el cuadrado— , justificándose luego diciendo: *"porque me acordé que la profesora una vez nos dijo que el cuadrado era especial... es rectángulo, tiene los cuatro lados iguales...",* de modo que para él aquellas características particulares del cuadrado, que posee cuatro ejes de simetría, además de simetría central, son más bien argumentos de que su selección es la más representativa. Parece cierta en efecto esa intención por parte del alumno pues, en contraste, para el ítem 5 escogió acertadamente el triángulo escaleno y argumentó: *"porque es escaleno... porque es más general"*, lo cual habla a favor de lo antes argumentado en el sentido de que al pasar de los triángulos a los cuadriláteros tiende a incrementarse la preferencia por la simetría.

Las justificaciones dadas por los alumnos que no evidenciaron la presencia del obstáculo para este indicador —sólo 4 del total— fueron en general muy parecidas. Todos ellos escogieron en el ítem 5 el triángulo escaleno —opción (b)— y sus justificaciones aducían razones de generalidad de la solución. Así por ejemplo, el alumno #5 argumentó: *"para no personalizar";* el alumno #17 explicó: *"porque si tomo (c) [el triángulo equilátero] es más fácil... para que no se vea que sólo en los triángulos equiláteros se cumple";* el alumno #20 indicó: *"porque uno escoge el triángulo que sea menos equilátero, porque si se cumple en (b) se cumple en los otros";* y el alumno #30 manifestó: *"porque es el más general... los demás presentan todo muy fácil"*. Argumentos similares fueron esgrimidos por estos alumnos para los otros ítems de este grupo en los cuales escogieron figuras asimétricas. Cuando escogieron figuras simétricas, argumentaban que no lo hacían *"por ninguna razón en particular"*; mismo argumento expresado por el alumno #13 para sus selecciones en los ítems 16 y 23, a pesar de haber escogido en ambos casos figuras asimétricas. Sólo un alumno (#5) seleccionó figuras asimétricas en los tres ítems.

Valoración de los indicadores.

Observando nuevamente el Cuadro N° 5, se aprecia para el indicador N° 1 una incidencia total (100%) dentro de los alumnos de la muestra; es decir, todos los sujetos dibujaron, de las cuatro figuras solicitadas, al menos dos —en la práctica, al menos tres— con algún eje o centro de simetría. En cuanto al indicador N° 2, la incidencia registrada fue también sumamente alta (87%), resultado de que sólo 4 de los 30 sujetos dejaron de evidenciar la presencia del obstáculo para este indicador. La diferencia entre ambos resultados, relativamente pequeña, se debe seguramente a que en el segundo caso se le exigía al alumno escoger una figura con un condición muy clara, como lo es la de que la solución fuese válida para todo triángulo, cuadrilátero o pentágono, según el caso, mientras que en los ítems del indicador N° 1 se le brindaba más libertad.

Valoración del obstáculo

En el Cuadro N° 5 puede observarse la incidencia del obstáculo en forma global, registrándose el máximo valor posible (100%), de forma que todos los alumnos de la muestra , sin excepción, manifestaron la presencia del obstáculo para al menos uno de los dos indicadores –de hecho, 26 lo manifestaron en ambos y 4 en sólo uno–.

Con respecto a esta evaluación es pertinente una acotación. Bien pudiera pensarse que aquellos alumnos que registraron la presencia del obstáculo para el indicador N° 1 pero no para el N° 7, debieran eximirse de ser evaluados como poseedores del obstáculo en forma global. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que para el indicador N° 2 los alumnos debían escoger la figura, no construirla por sí mismos, y nada garantiza que en un momento dado, al tener ellos que dibujar una figura, teniendo en cuenta la fuerte tendencia a dibujar figuras simétricas evidenciada por el indicador N° 1, no caigan en el error de construir triángulos, cuadriláteros o cualquier otra figura con ejes o centros de simetría. No obstante, independientemente de lo anterior, el que el índice global sea de un 100% o de un 87% realmente no hace mucha diferencia, y refleja por igual la fuerte presencia del fenómeno.

Conclusiones

Del análisis de los resultados se llegó a las siguientes conclusiones:

- Los estudiantes de geometría de la Facultad de Ingeniería de LUZ hacen uso preferentemente de figuras simétricas para el análisis y solución de problemas geométricos, independientemente de si estos últimos se refieren o no a figuras simétricas.
- De las respuestas y justificaciones dadas por los alumnos se infiere que poseen la concepción de que las figuras simétricas gozan de preponderancia con respecto a las que no lo son.
- La preferencia por el uso de figuras simétricas es persistente, presentándose a pesar de que los alumnos hubiesen concluido el curso de geometría y de las advertencias hechas por los docentes sobre su uso indiscriminado, observándose como una tendencia generalizada en la población objeto de estudio.
- En virtud de su carácter persistente y de presentarse en todos los alumnos de la muestra, se concluye que la concepción de que es preferible el uso de figuras simétricas para la solución de problemas geométricos es un obstáculo epistemológico presente en la población objeto de estudio.

Recomendaciones

- Llevar a cabo investigaciones en la misma área o en otras áreas de la matemática con el fin de identificar otros posibles obstáculos dentro de la población de alumnos del Departamento de Matemática y de su vinculación con los errores observados en los alumnos.
- Efectuar estudios de casos de carácter longitudinal que permitan conocer más detalladamente las características y evolución que sufre el obstáculo de la simetría.
- Diseñar situaciones didácticas que permitan a los alumnos percatarse de la presencia de este obstáculo e involucrarse en un proceso que eventualmente conduzca a su superación, caracterizado por lograr que se enfrenten continua y reiteradamente ante contradicciones derivadas de su concepción acerca del uso de la simetría.
- Difundir los resultados de esta investigación entre docentes de primaria y secundaria, a fin de advertirles acerca de la necesidad de evitar el uso indiscriminado de figuras simétricas dentro de sus respectivos procesos de enseñanza-aprendizaje, buscando minimizar la generación del obstáculo de la simetría en sus alumnos. ⓔ

*Ingeniero Civil. Magíster en Matemática, Mención Docencia. Profesor Asociado a tiempo completo del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería (LUZ). Cuenta con amplia experiencia docente en el área de la matemática a nivel de pregrado, y ha dictado algunos cursos especiales a nivel de posgrado. Se ha desempeñado como Jefe de la Cátedra de Geometría. PPI Nivel Candidato.

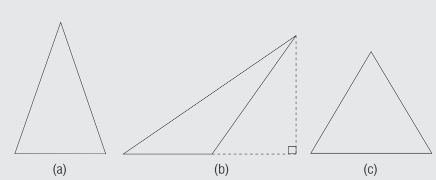
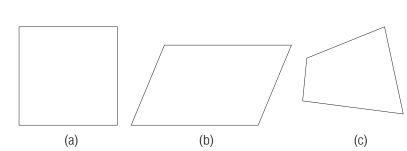
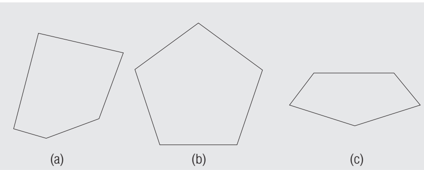
**Ingeniero Civil. Magíster en Matemática. Mención Docencia. Profesora Asociada a tiempo completo del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería (LUZ). Se ha desempeñado como Jefe de la Cátedra de Geometría y Jefe del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería. Actualmente es Miembro de la Comisión de Planificación de la Facultad de Ingeniería y Miembro suplente del Consejo de Publicaciones (LUZ).

***Ingeniero Civil. Magíster en Matemática, Mención Docencia y Doctora en Ciencias Humanas, área: Currículo. Profesora Titular a Dedicación Exclusiva del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería (LUZ). Directora de la División de Investigaciones de la misma Facultad. PPI Nivel Candidato en el Programa de Promoción al Investigador. Acreedora del “Premio por Rendimiento Académico de LUZ”.

****Licenciada en Educación, Mención Ciencias Matemáticas (LUZ). Magíster en Matemática, Mención Docencia (LUZ). Profesora Titular a Dedicación Exclusiva del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ingeniería (LUZ).Se ha desempeñado como Miembro del Consejo de la Facultad de Ingeniería, desempeñándose como Secretaría del Consejo de Facultad. Cuenta con amplia experiencia Docente en el área de la matemática a nivel de pregrado. Ha participado en eventos científicos en calidad de ponente.

*****Licenciado en Educación, Mención Ciencias Matemáticas. Magíster en Matemáticas, Mención Docencia. Profesor Asociado a Dedicación Exclusiva del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ingeniería (LUZ). Cuenta con amplia experiencia docente a nivel de educación media, y se desempeñó como profesor en Estadística e Informática de (UNICA). Docente a nivel de Pregrado (LUZ). Ha participado en eventos científicos en calidad de ponente.

Cuadro 1. Resumen de ítems empleados para evaluar el obstáculo de la simetría, agrupados por indicador.

INDIC.	ITEM		FIGURA
	N°	ENUNCIADO	
1	1	Dibuje, a mano alzada, un triángulo	(A elaborar por el alumno)
	2	Dibuje, a mano alzada, un cuadrilátero	(A elaborar por el alumno)
	3	Dibuje, a mano alzada, un pentágono	(A elaborar por el alumno)
	4	Dibuje, a mano alzada, un hexágono	(A elaborar por el alumno)
2	5	Suponga que se requiere demostrar que en todo triángulo se cumple que el producto de multiplicar cada lado por su altura correspondiente es una constante. Indique, encerrando en un círculo la letra correspondiente, cuál de las siguientes figuras escogería usted para tal demostración:	
	6	Suponga que se requiere demostrar que los puntos medios de los lados de todo cuadrilátero son vértices de un paralelogramo. Indique, encerrando en un círculo la letra correspondiente, cuál de las siguientes figuras escogería usted para tal demostración:	
	7	Suponga que se requiere demostrar que la suma de los ángulos interiores de un pentágono es igual a 540. Indique, encerrando en un círculo la letra correspondiente, cuál de las siguientes figuras escogería usted para tal demostración:	

Fuente: Bohórquez et ál. (2008)

Cuadro 2. Criterios utilizados para valorar los ítems.

Criterio	Valor asignado
La concepción evidenciada por el alumno apunta hacia la presencia del obstáculo, de acuerdo al indicador en cuestión.	1
La concepción evidenciada por el alumno no apunta hacia la presencia del obstáculo, de acuerdo al indicador en cuestión.	0

Cuadro 3. Criterios utilizados para valorar los indicadores.

Criterio	Valor asignado
El promedio de los ítems correspondientes es de al menos 0,5 (incidencia del 50% o mayor).	1
El promedio de los ítems correspondientes es menor que 0,5 (incidencia menor al 50%).	0

Cuadro 4. Criterios utilizados para valorar los obstáculos.

Criterio	Valor asignado
El promedio de los indicadores correspondientes es de al menos 0,5 (incidencia del 50% o mayor).	1
El promedio de los indicadores correspondientes es menor que 0,5 (incidencia menor al 50%).	0

Cuadro 5. Resumen de datos obtenidos de la aplicación del cuestionario y la entrevista.

Indicador	Ítem	Valoración Ítems	Valoración Indicador	Valoración Obstáculo
1. Dibujar por lo general figuras geométricas con al menos un eje de simetría o un centro de simetría.	1	90%	100%	100%
	2	93%		
	3	97%		
	4	100%		
2. Apoyarse por lo general en figuras simétricas para la solución de un problema geométrico.	5	73%	87%	
	6	83%		
	7	90%		

Bibliografía

Ausubel, David Paul, Novak, Joseph D. y Hanesian, Helen (1983/2001). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo* (14ª reimpresión de la 2ª Edición). México: Editorial Trillas.

Bachelard, Gaston (1973). *Epistemología.* España: Anagrama.

Bachelard, Gaston (1994). *La formación del espíritu científico.* México: Siglo Veintiuno.

Botero Bernal, Andrés (2001). Apuntes sencillos para una clase magistral sobre Parménides de Elea*. Revista Telemática de Filosofía del Derecho.* Recuperado el 16 de febrero de 2006 en http://www.filosofiayderecho.com/rtfd/numero4/parmenides.htm#_ftn63.

Brousseau, Guy (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland y Virginia Warfield (Eds.). USA: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, Guy (2001). *Les erreurs des élèves en mathématiques*. Brigitte Bernard (Trad.). Manuscrito no publicado.

Busot, J. Aurelio (1991). *Investigación Educacional* (1ª reimpresión de la 2ª edición). Maracaibo, Venezuela: Editorial de la Universidad del Zulia (EDILUZ).

Carretero, Mario (1998). *Introducción a la psicología cognitiva*. Argentina: Aique Grupo Editor.

Castro de Bustamante, Jeannett (2007). La investigación en educación matemática: una

Bibliografía

hipótesis de trabajo. *EDUCERE.* Mérida, Venezuela, 38, 519-531.

Chávez Alizo, Nilda (1994). *Introducción a la investigación educativa.* Maracaibo, Venezuela.

Gutting, Gary (1989). *Michel Foucault's Archaeology of Scientific Reason.* New York, USA: Cambridge University Press.

Flórez Ochoa, Rafael (1994). *Hacia una pedagogía del conocimiento*. Bogotá, Colombia: McGraw Hill.

Franchi, Lissette y Hernández, Ana Ismenia (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. Parte II. *EDUCERE. Mérida, Venezuela, 25,* 196-204.

Hernández Sampieri, Roberto, Fernández Collado, Carlos y Baptista Lucio, Pilar (1998). *Metodología de la Investigación* (2ª Edición). México D.F., México: McGraw Hill.

Marshall, James (1999). Bachelard and Philosophy of Education. *Encyclopedia of Philosophy of Education online*. Bristol University, New Zealand. Recuperado el 16 de febrero de 2006 en http://www.vusst.hr/ENCYCLOPAEDIA/main.htm.

Martínez Riu, Antoni y Cortés Morató, Jordi (1999). *Diccionario Herder de Filosofía*. Barcelona, España: Empresa Editorial Herder.

McGuigan, Frank Joseph (1996). *Psicología Experimental. Métodos de Investigación* (6ª edición). México: Prentice Hall.

Padua, Jorge (1996). *Técnicas de Investigación aplicadas a las ciencias sociales* (6ª edición). México: Fondo de Cultura Económica.

Sierpinska, Anna (1992). On Understanding the Notion of Function. En Harel, Guershon y Dubinsky, Ed (Eds.), *The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Mathematical Association of America, MAA Notes, vol. 25.

Vitruvius (1914). *The Ten Books on Architecture*. Morris Hicky Morgan (Ed.). Cambridge, Massachusetts, USA: Harvard University Press.

Weyl, Hermann (1989). *Symmetry*. New Jersey, USA: Princeton University Press.
University Press.