EPISTEME NS, VOL. 30, Nº 1, 2010, pp.51-84

María Manzano
Enrique Alonso

NOCIONES DE COMPLETUD[1]

Resumen: Este trabajo está dedicado a la evolución de la noción de *completud de un cálculo* en la lógica contemporánea. Analizamos las condiciones y el estado de la cuestión bajo las cuales se desarrolla la demostración de completud de Gödel de 1930, especialmente en lo que concierne al *problema de la decisión* en la lógica de primer orden. A continuación discutimos las diferencias entre las nociones de *completud de una teoría* y *completud de un cálculo* a la luz de la aportación decisiva de Tarski. La última parte de este estudio está dedicada a Henkin y a la generalización de su prueba de completud a cualquier lógica desde su trabajo inicial en *teoría de tipos*. Ponemos especial énfasis en entender las diferencias entre cómo se empleaban entonces ciertos conceptos básicos y en el papel que hoy desempeñan en la lógica.

Palabras claves: cálculo, completud de una teoría, completud de un cálculo.

COMPLETENESS NOTIONS

Abstract: This paper focuses on the evolution of the notion of *completeness of a calculus* in Contemporary Logic. We analyze the conditions and the status through which Gödel's 1930 proof of completeness was developed, particularly when dealing with the decision problem for first-order logic. We also discuss the differences between the notions of *completeness of a theory* and of *completeness of a calculus* in the light of Tarski's crucial contribution. The last part of this study is devoted to Henkin's work concerning the generalization of his completeness proof to any logic from his initial work in type theory.

[1] Agradecimientos: Este artículo ha sido posible gracias al proyecto de investigación del Ministerio de Ciencia en Innovación de España, de referencia FFI_2009_09345MICINN.

Recibido 15-03-10 ☼ Aceptado 29-03-10

We put special emphasis on understanding the differences in how certain concepts were used then and now, as well as on the role they play today for the task of logic.

Keywords: Calculus, Completeness of a Theory, Completeness of a Calculus.

1. Los inicios.

La tarea de la Lógica ha adquirido a lo largo del siglo XX una serie de rutinas, procedimientos y nociones básicas que forman una especie de marco disciplinar o canon al que se ciñen, con mayor o menor precisión, todas las investigaciones que se llevan a cabo en esta disciplina. Dentro de este marco hay contenidos que son más elementales que otros y también los hay sometidos a polémica[2], pero en general se trata de unos materiales que todos hemos aprendido a manejar con soltura a la hora de plantear nuestras investigaciones.

En este trabajo pretendemos analizar algo tan básico para ese marco como el papel que desempeña la prueba de completud de un sistema formal o cálculo a la hora de presentarlo en sociedad. El estudio de este problema llevará, como no puede ser de otra forma, a un repaso de las nociones semánticas básicas, así como del momento y forma en que se incorporan como materiales típicos de la investigación en Lógica.

Es bien sabido que la lógica contemporánea –la que progresa desde las contribuciones de Frege, Peirce, Boole o Schröder durante la segunda mitad del siglo XIX– adopta en sus orígenes lo que podríamos llamar un sesgo sintactista[3]. Intentaremos explicar esta afirmación reconociendo, además, la existencia aquí de dos tradiciones bien distintas, una dependiente de Frege, continuada luego por Russell y Whitehead, y otra basada en los trabajos de Boole y Schröder. Para Frege, pero sobre todo para su gran divulgador, Bertrand Russell, la tarea de la lógica

---

2 Un buen ejemplo de este género de disputas es la prioridad *sintaxis* o *semántica*, es decir, la preferencia del análisis semántico sobre el sintáctico a la hora de analizar un sistema formal.

3 El término ideal es aquí el adjetivo "proof theoretic" que, para nuestra desgracia, sigue sin tener una traducción satisfactoria en español.

consiste en fijar, a través de los recursos de los lenguajes formales, el significado de las nociones lógicas fundamentales. El lenguaje ordinario contiene partículas cuyo papel en el discurso científico, que tiene lugar en el ámbito de la matemática, había sido convenientemente identificado por Frege desde la *Conceptografía*. La forma en que ese significado debe ser fijado, aclarado y precisado es mediante la elección de símbolos apropiados en el contexto de un lenguaje formal previamente definido y, una vez ahí, a través de los axiomas que controlan su correcta manipulación. Es justo que para referirnos a esta tradición empleemos el término axiomática[4]. Las contribuciones de Boole y Schröder se encuadran dentro de una preocupación algo distinta. En este caso, de lo que se trata es de definir todas las transformaciones simbólicas que mantienen la validez de una serie de ecuaciones básicas del tipo a ♀ $\cup \sim$ ♀ $= 1$ cuya validez se desea preservar. Aquí el significado de las partículas está fijado al marco de referencia del álgebra abstracta. Por tanto, hablaremos de una tradición *algebraica*.

Parece claro que ni en la tradición axiomática ni en la algebraica se plantea en momento alguno el asunto de la completud del cálculo. Como muy bien explican Dreben y Van Heijenoort en su nota introductoria al artículo de completud de Gödel[5], simplemente no existen las nociones semánticas que puedan dar lugar a ese concepto. Este hecho es especialmente claro en el caso de Russell, para quien no parece existir un espacio propio para el estudio semántico de las constantes lógicas de un lenguaje formal. De un lado tenemos el lenguaje ordinario y el funcionamiento de esas partículas en el mismo. Lo que cabe encontrar allí no son sino nociones oscuras e imprecisas, tan imprecisas como el propio medio en el que operan. La única forma de rescatarlas de ese medio tan perturbador es mediante la formaliza-

4 Evitamos referirnos en este punto al logicismo ya que sólo nos interesa una parte muy concreta de la forma en que Russell concibe el alcance y tarea de la lógica.

5 Dreben, B. y Van Heijenoort, J.: "Introductory Note to 1929, 1930 and 1930a". En Feferman, J.S. Dawson, I. W., et al, editores, *Collected Works of Kurt Gödel; Vol I y II*, Oxford, S. Oxford University Press, 1986.

ción y la correcta descripción de los axiomas que aclaran su significado real. Esa es la tarea de la lógica y en ese sentido es *universal*[6].

Parece haber un acuerdo suficientemente amplio a la hora de fijar el origen del problema de la completud dentro de la otra gran tradición de la época, el *programa formalista*. En la primera edición de los *Elementos de lógica teórica*, que data de 1928, Hilbert y Ackermann plantean ese asunto como uno de los grandes problemas abiertos para el *cálculo restringido de predicados* –la lógica de primer orden– y citan resultados esperanzadores obtenidos previamente por investigadores de su entorno. El primero en obtener un teorema de completud reconocible como tal podría haber sido P. Bernays, limitando su alcance al fragmento proposicional de la lógica, el cálculo proposicional clásico. El resultado aparece en su *Habilitationsschrift* de 1918 y habría sido publicado posteriormente en un trabajo monográfico que data de 1926. En el entretanto aparece un resultado similar publicado por Post en 1921 y un estudio de Behmann de 1922 en el que también se ataca el problema de la completud del fragmento monádico a partir de las ideas expuestas por Löwenheim en 1915. Pero, *¿es correcto ver en estos resultados genuinos teoremas de completud tal y como ahora los entendemos?*

Una buena forma de abordar este asunto es prestar algo de atención a los métodos empleados, por aquel entonces, para analizar las fórmulas de un cálculo, y en este sentido nos parece especialmente relevante el uso que se empieza a hacer de las *tablas de verdad*. Parece probado que este procedimiento es empleado de manera independiente por Post y Bernays y también por Wittgenstein en el *Tractatus*. En la actualidad consideramos que las tablas de verdad constituyen mecanismos semánticos aptos para cálculos de tipo proposicional y diseñadas como una forma eficaz de representar las valuaciones o interpretaciones previamente definidas sobre el lenguaje. Es decir, cada una de las líneas de una tabla de verdad representa lo que una interpretación dice de la fórmula o fórmulas analizadas. Son mecanismos que se conciben en relación a un entramado semántico previo en el que las nociones

6 Esta expresión es la que emplean Dreben y Van Heijenoort (en Dreben, B. y Van Heijenoort, J., "Introductory Note to..., cit., y aunque no se toman muchas molestias en aclarar su uso, creemos que responde a lo que aquí estamos diciendo.

básicas de *verdad bajo una interpretación* y *verdad lógica*, han sido definidas a partir de la clase de valuaciones o interpretaciones admisibles. Resulta razonable pensar, visto al menos desde nuestro punto de vista, que el uso de tablas de verdad debía presuponer ya en ese momento una comprensión suficiente de las nociones semánticas de las que parece depender. Sin embargo, sorprende la poca o nula importancia que se concede a estas nociones, al punto de poder afirmar que en algún caso, como el de Post, ni siquiera están presentes. En los demás tienen un significado que, como poco, es muy distinto al que ahora les concedemos.

Hablar en ese momento, la década de 1920, de mecanismos semánticos nos parece, simplemente, un error conceptual, motivado en buena medida por la mera trasposición de la estructura y organización que estas nociones tienen en el momento actual, pero que de ninguna forma es el que tenían en aquella época. Para referirnos a todos estos mecanismos de clasificación de fórmulas, basados en la atribución de alguna propiedad que se propaga de manera funcional a través de su estructura, usaremos el término, más prudente, de *protosemántica*. Dentro de esta protosemántica entrarían tanto las tablas de verdad como las formas normales, empleadas de forma significativa por Bernays en su prueba, así como los métodos, también tabulares, ideados para establecer resultados de independencia.

Y ahora la cuestión es, si no hay una semántica completamente desarrollada capaz de oponer sus nociones básicas a las que proceden del cálculo, *¿cómo es que se llega a plantear siquiera la completud como un problema?* La respuesta se puede hallar en la propia estrategia sintactista adoptada desde los inicios del proyecto de formalización de la Lógica. Si la axiomatización de un sistema formal no resulta evidente en sí misma, como en alguna medida pretendía Russell, *¿qué criterio se tiene para establecer su bondad, más aún cuando se dispone de bases axiomáticas alternativas distintas?* Parece necesario probar de alguna manera que las fórmulas obtenibles como teoremas son todas las que deben y no más de las que deben ser probadas. La segunda parte del problema era relativamente fácil de atacar y lleva directamente a la definición de la *consistencia de un cálculo* como aquella propiedad según la cual nunca se pueden obtener como teoremas una fórmula y su negación, o equivalentemente, como la garantía de que existe al menos una fórmula del lenguaje que no es un teorema del cálculo. La contrapartida, es decir, la *suficiencia del cálculo* expresada como la condición por la cual toda fórmula que haya de ser un teorema, de hecho lo es, resulta mucho más difícil de precisar. *¿Qué propiedad es aquella que da derecho a que una fórmula sea un teorema, distinta, claro está, de ser derivable a partir de los axiomas y reglas del cálculo?*

Una buena forma de obviar esta cuestión consiste en intentar definir un criterio de suficiencia puramente sintáctico a imagen y semejanza del que viene expresado en la consistencia del cálculo. Post adopta esta estrategia, bastante natural si se piensa, cuando introduce su definición de completud en los siguientes términos:

Para cada fórmula φ o bien $\vdash \varphi$ o bien el cálculo se torna inconsistente, propiedad conocida desde entonces como *completud tipo Post*. No obstante, parece fácil imaginar que la condición que realmente queda señalada como objetivo al adoptar esta estrategia no es sino el correlato sintáctico de la consistencia, es decir, lo que hoy denominamos completud de una teoría y que se expresa al decir que:

Para cada sentencia φ o bien $\vdash \varphi$ o bien, $\vdash \neg \varphi$

Obviamente las sentencias no contienen variables proposicionales.

Post[7] sin embargo va a seguir en este punto una estrategia que podría calificarse de moderna. Su manejo de las tablas de verdad le permite introducir un criterio independiente del cálculo a la hora de seleccionar la clase de fórmulas con respecto a las que se va a medir la cuestión de la suficiencia. Además aprecia claramente la conexión directa que existe entre tablas y formas normales, lo que produce, en su opinión, una forma muy natural de probar completud.

Si hubiera que hacer un resumen de los hechos más relevantes de este periodo, con respecto al asunto de la completud, creo que habría que señalar al menos estos dos: la ausencia de una interpretación clara de qué significa que un cálculo sea completo y la inexistencia de nociones semánticas independientes más allá de ciertos mecanismos –algoritmos, de hecho orientados a clasificar fórmulas. Lo que hemos

[7] En Post, E., "Introduction to a General Theory of Elementary Propositions", 1921. En Van Heijenoort, J., *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*, Cambridge, Mass: Harvard University Press, 1967, p.271.

denominado aquí protosemántica está formado en realidad por una colección de procedimientos mecánicos orientados a resolver si una fórmula tiene o no una determinada propiedad. La semántica militaba pues en el frente de los procedimientos algorítmicos, mientras que los cálculos se quedarían un paso atrás, limitándose a obtener demostraciones de fórmulas que de hecho son demostrables. Las nociones semánticas no van a obtener de este modo un estatuto complemente independiente de los mecanismos de cálculo, ya que están limitadas por la posibilidad de conducir a procedimientos de decisión sobre fórmulas del lenguaje. La *decidibilidad* era pues la propiedad relevante y la completud una mera constatación de que las reglas exhiben adecuadamente la conducta de las constantes lógicas. Creemos que, vistas así las cosas, no puede extrañar en absoluto que la completud de los distintos fragmentos de la Lógica fuera concebida siempre como una propiedad derivada de la construcción de algún algoritmo de decisión para las fórmulas del lenguaje: Post y Bernays en cierto modo habían constatado lo prometedor de esa vía de ataque del problema, pero en modo alguno fueron los únicos.

La evolución de los acontecimientos en este periodo ofrece una imagen de la tarea de la Lógica bastante distinta a la actual. La semántica no posee un cuerpo doctrinal y teórico autónomo y además se concibe como una colección de algoritmos de decisión orientados a clasificar fórmulas. La completud se ve, por tanto, como una consecuencia de la decidibilidad del cálculo y no como la comparación de dos conceptos básicos e independientes, el de prueba y el de consecuencia semántica. No puede extrañar que lo prioritario en ese momento fuera por tanto establecer algún resultado de normalización –un teorema de forma normal– mediante el cual aplicar los distintos algoritmos de decisión previamente definidos.

Pero, *¿qué hace que las cosas lleguen a ser tan distintas en la actualidad?* Creemos que para que termine de definirse plenamente el marco conceptual contemporáneo resultan decisivas tres aportaciones a las que luego se va a sumar el trabajo de muchos otros. La primera es el resultado de completud obtenido por Gödel en 1930 en el que, por primera vez, –y como no podía ser de otro modo– se aborda el asunto de la completud en ausencia de un resultado previo de decidibilidad. Téngase en cuenta que la solución definitiva al *problema de la decisión –Entscheidungsproblem–* va a tener que esperar seis años hasta la publicación de los resultado de Church y Turing. La estrategia adoptada por Gödel en su prueba abre un espacio propio a las nociones de tipo semántico al comprender que su estatus metateórico las sitúa en un plano totalmente distinto al de las nociones procedentes del cálculo. Esa es la brecha por la que va a penetrar el trabajo de Tarski, concediendo un estatuto completamente matemático a conceptos que, hasta entonces, no habían sido entendidos propiamente, en especial, el de *modelo* y clase de todos los modelos admisibles de un lenguaje y, como no, el propio concepto de *consecuencia semántica*. El tercer y último hito es la propia prueba de completud establecida por Henkin en 1950. En este caso la importancia radica en que ofrece un método que permite generalizar las pruebas de completud prácticamente a cualquier producto formal, haciendo que de ese modo se convierta en un estándar para la tarea de la Lógica.

Es preciso señalar que a partir de 1920 se desarrolló una actividad frenética de fundamentación de la matemática, muchas veces centrada en la demostración de *completud de una teoría*; aspiración que Gödel en 1931 frustró. Sin embargo, fue en ese contexto en donde se manejaba el concepto de modelo y en donde se constató que una misma teoría puede recibir distintas interpretaciones o modelos y en donde surgió el concepto de *"completud de una teoría respecto de un modelo o clase de modelos"*. Con la *definición de verdad* de Tarski la semántica adquiere carta de ciudadanía y dejó de ser considerada intuitiva, peligrosa, carente de rigor.

Justamente el concepto actual de *completud de una lógica en sentido débil* –esto es, si $\models \varphi$ entonces $\vdash \varphi$, para cada sentencia φ– surgió del de *"completud de una teoría respecto de un modelo o clase de modelos"* al extender la clase modelos al máximo y reducir al mínimo la de axiomas. Y la de *completud en sentido fuerte* –esto es, si $\Gamma \models \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$, para cada sentencia φ y conjunto de sentencias Γ– al considerar cualquier conjunto Γ como teoría y contrastarlo en la clase de todos sus modelos.

Creemos que esto permitió a Henkin replantearse el problema de la completud de la lógica de primer orden, desde una perspectiva de *teoría de modelos*.

2. Completud hoy.

En varios lugares nos hemos referido al marco conceptual de la Lógica como un conjunto de técnicas y estándares que seguimos a la hora de llevar a cabo cualquier tipo de investigación en Lógica, pero ¿qué contenidos lo integran? Una buena forma de abordar esta cuestión consiste en responder a otra de apariencia más simple: *¿qué es una lógica?* Obsérvese que no hablamos de la *Lógica* como disciplina, sino de una lógica, es decir cada uno de los sistemas que son estudiados por *la* Lógica. Creo que una definición como la siguiente podría gozar del consenso de una buena parte de la comunidad:

Una lógica es un triplo en el que se dan las definiciones explícitas de los siguientes conceptos básicos:

1. Un lenguaje formal, L
2. Una relación de derivabilidad formal, $\vdash$
3. Una relación de consecuencia semántica, $\models$

La derivabilidad formal y la consecuencia semántica son, desde un punto de vista absolutamente general, relaciones que se establecen entre conjuntos de fórmulas –las premisas– y fórmulas –la conclusión. La primera depende esencialmente de la noción de cálculo mientras que la segunda se define a través de la completa especificación de la clase de modelos o interpretaciones admisibles sobre las fórmulas del lenguaje. Derivabilidad y consecuencia se definen por métodos independientes que presuponen en todo momento la autonomía de ambas nociones. No obstante, se supone que, de alguna manera, tanto la una como la otra constituyen interpretaciones de una relación abstracta que sólo dependería del lenguaje formal previamente dado y que, por lo tanto, han de coincidir en extensión. De hecho sería muy difícil aceptar como un producto genuino de la Lógica un triplo en el que la derivabilidad arrojara resultados que no son sancionados en el lado de la consecuencia semántica. Cuando una lógica fracasa en la prueba de *corrección del cálculo* no hablamos siquiera de lógica incorrecta, simplemente nos vemos obligados a revisar sus reglas hasta ajustar las cosas como es debido. Si el cálculo deductivo nos va a resultar útil es porque nos ayudará a no equivocarnos; no nos conducirá de hipótesis verdaderas a conclusiones falsas, esto es lo que garantiza la corrección del cálculo.

La dirección inversa, es decir, la *completud* admite otras lecturas. Hemos aprendido que no toda teoría es completa y que no toda lógica ha de serlo por el mero hecho de haber recibido todo el cuidado y esmero de la comunidad científica. La existencia de una axiomatización pretendidamente satisfactoria de una teoría no garantiza completud y por tanto su fallo no indica siempre un defecto en las definiciones ni en los conceptos subyacentes. Hay ocasiones en las que las cosas son simplemente así. Creemos que la capacidad expresiva de una lógica y su capacidad computacional son interdependientes y que el precio que hay que pagar por el aumento de la primera va en detrimento de la segunda. Se puede aspirar al equilibrio, no a que ambas sean máximas.

En resumen, una lógica no sólo es un triplo del tipo descrito, sino que además ha de incorporar ciertas garantías acerca del modo en que la derivabilidad y la consecuencia ajustan entre sí. La situación óptima es aquella en la que derivabilidad y consecuencia coinciden extensionalmente, sólo en ese caso tenemos la certeza de que nuestro análisis de las categorías formales –constantes y variables según su tipo– vertidas en el lenguaje resulta satisfactorio. Solamente cuando las reglas del cálculo y las cláusulas de las constantes lógicas ajustan del modo esperado nos damos realmente por satisfechos. Otras propiedades como la decidibilidad del la lógica resultan deseables, pero ya no son imprescindibles.

Lo primero que se evidencia en este modo de entender la tarea de la Lógica –vista a través de la definición y requisitos de cada lógica particular– es el reconocimiento explícito de la profunda independencia que hay entre las nociones de derivabilidad y consecuencia, es decir, entre las técnicas y procedimientos que provienen del cálculo –*teoría de la demostración*– y aquellas que proceden de la semántica formal, del ámbito de la *teoría de modelos*. De hecho, y a la vista sólo de las respectivas definiciones, es cierto que nada garantiza la coincidencia extensional de ambas relaciones, aunque también es verdad que ése es un objetivo perseguido en todo momento y por tanto nada milagroso. Ni las reglas del cálculo ignoran la definición de los modelos ni las cláusulas semánticas obvian por completo aquello que se pretende en el cálculo[8]. En cualquier caso, creo que todos hemos

8 Es decir, las reglas de un cálculo no se definen sin tener en cuenta parte del análisis conceptual que ya se ha llevado a cabo en las cláusulas semánticas. En las

aprendido a reconocer aquí dos formas muy distintas de atacar la noción genérica o universal de consecuencia lógica, diferencias que sobre todo parecen referidas al comportamiento metateórico de ambas. Con independencia de la existencia de un resultado de decidibilidad, la derivabilidad parece orientada a la enumeración efectiva de los teoremas de la lógica, mientras que la consecuencia sólo apunta a una caracterización precisa de la propagación de la verdad lógica, sin especificar nada acerca del modo de comprobar de manera efectiva si una fórmula es o no válida. Esta diferencia se exporta incluso a dominios en los que sí existe una demostración de decidibilidad, forzando en ocasiones interpretaciones difíciles de justificar. Este es el caso, por ejemplo, de la lógica proposicional clásica. No es raro que al discutir el cálculo de deducción natural para este fragmento de la lógica elemental, se aconseje al neófito proceder primero a efectuar una tabla de verdad que compruebe si la fórmula o argumento es válido. Si el resultado es positivo, entonces puede procederse a demostrar en el cálculo la fórmula o argumento en cuestión. Este planteamiento suele provocar en nuestros estudiantes la idea de que los métodos semánticos son en esencia algoritmos de decisión adjuntos a la noción de derivabilidad, que en el fondo es el auténtico asunto de la lógica. Sin una prueba en el cálculo no se tiene realmente una razón para admitir una fórmula entre las verdades de la lógica en cuestión[9]. Este tipo de comportamientos sólo evidencia el profundo arraigo que posee entre la comunidad educativa el reconocimiento de la diferencia conceptual existente entre derivabilidad y consecuencia, diferencia que se aplica incluso en aquellos casos en los que o bien no es obvia, o resulta directamente cuestionable.

Otra muestra de este modo de concebir las cosas es la polémica de la prioridad. *¿Qué enfoque de la consecuencia aporta más valor añadido al*

---

ocasiones en las que se actúa al revés, es decir, en las que se parte de una posición sintactista con un cálculo desarrollado para el que no se posee una semántica adecuada también sucede lo mismo. Piénsese si no en la semántica de mundos posibles para la Lógica Modal o en los intentos de dotar de una semántica plausible a las distintas lógicas relevantistas.

9 En el límite, esto ha podido llevar a algunos a considerar como un método semántico las tablas analíticas –*tableaux*– ya que a menudo son empleadas también como un paso previo a la búsqueda de una prueba en deducción natural.

análisis de los componentes del lenguaje formal? En varios trabajos publicados a lo largo de la década de 1990, Etchemendy denuncia la prioridad atribuida, según él de forma poco reflexiva, a las nociones de tipo semántico. Esto se apreciaría por ejemplo en ciertas expresiones que se han hecho habituales entre nosotros y en las que siempre es el cálculo el que debe mostrar su equivalencia con la semántica: hablamos, por ejemplo, de que tal o cual cálculo es completo, pero nunca se dice que esta o aquella clase de modelos es completa con respecto a un cálculo. La excepción la tenemos en el caso de la lógica de orden superior en donde justamente se admiten modelos no estándar para alcanzar la completud del cálculo.

La importancia relativa de la corrección y la completud parece clara en cualquier caso. No hay cálculos incorrectos aunque sí los hay incompletos. Pero, *¿qué sucede en este contexto con la decidibilidad?* Como ya hemos dicho, la importancia relativa de esta propiedad ha variado mucho desde la etapa fundacional de la lógica contemporánea hasta nuestros días. Su momento álgido se alcanza seguramente en la década de 1920 y dentro del programa formalista, que empieza a entender la tarea de la lógica como algo esencialmente ligado a la capacidad de un sistema formal para capturar un ámbito correcto de la realidad. La llegada de los primeros resultados negativos en la década posterior, invirtió sutilmente el punto de equilibrio desplazando la decidibilidad hacia la periferia. En la actualidad, corrección, completud y decidibilidad vienen a ofrecer una especie de medida de la calidad de un formalismo, medida en la que lo que se viene a contraponer serían la capacidad expresiva del lenguaje y el control computacional del mismo. La lógica clásica de enunciados es completa y decidible, pero su potencia expresiva resulta insuficiente para capturar cualquier teoría con un mínimo interés. La lógica de primer orden aún es completa, pero ya no es decidible. El precio a pagar es considerable, pero no excesivo. Su capacidad expresiva alcanza a un gran número de teorías pero carece de ciertas capacidades básicas –referidas a la cardinalidad de los modelos– que hace que caracterice con excesiva magnanimidad las teorías que permite analizar. La lógica de orden superior –bajo modelos estándar– no es ya completa, por lo que su potencia expresiva no parece compensarse con un control computacional aceptable. Tenemos un cálculo deductivo que nos permitirá demostrar como teoremas a una gran colección de fórmulas válidas, pero no a todas.

En este apartado hemos presentado el teorema de completud desde una perspectiva actual, lo que sigue será una reflexión sobre la relevancia teórica y práctica del teorema. Hemos visto que reconciliar las definiciones y los planteamientos sintácticos y semánticos de consecuencia constituye el núcleo de toda lógica –esto es, tanto de las lógicas puras y aplicadas, como de las clásicas y no clásicas–, incluso del de la que podemos denominar *lógica universal*. El teorema de completud, junto con el de corrección, establecen la equivalencia entre la noción sintáctica y la semántica de consecuencia, para un cierto lenguaje. Podemos plantear la cuestión así: la noción semántica de verdad sirve para seleccionar del conjunto de todas las sentencias de un cierto lenguaje, a las que son verdaderas en todos las estructuras o modelos adecuados, y a las cuales llamamos fórmulas lógicamente válidas, *VAL*. Por otra parte, a nuestro lenguaje formal, de naturaleza puramente sintáctica, podemos incorporarle un cálculo deductivo. Dicho cálculo permitirá deducir unas fórmulas de otras, y nos servirá para generar el conjunto de las sentencias del lenguaje que se pueden deducir sin premisas en el cálculo, y a las que llamamos teoremas lógicos, *TEO*. La cuestión es: *¿coinciden esos conjuntos?*

Demostrar que $VAL \subseteq TEO$ es el objetivo del teorema de completud débil, que $TEO \subseteq VAL$ lo es del de correción. La demostración de completud proporciona además información sobre la estructura de la clase de los modelos de una determinada lógica. Por ejemplo, la demostración de completud de Henkin para la teoría de tipos demuestra que el conjunto *TEO* de los teoremas del cálculo coincide con el conjunto *VAL* de las sentencias verdaderas en la clase de estructuras generales, pero es un subconjunto propio de las válidas en estructuras estándar. De hecho, cuanto más restrictiva sea la clase de modelos, mayor será la de las fórmulas en ella válida y a la inversa. La gran relevancia, tanto teórica como práctica, del teorema de completud es un lugar común en la actualidad. Empecemos por la primera. Se puede afirmar que no sabemos qué es una lógica hasta que no hemos identificado al conjunto de sus fórmulas válidas; esto es, la logicidad reside en *VAL*. Esta es la razón que aducimos. Cada interpretación selecciona del conjunto de todas las fórmulas a las sentencias verdaderas en ella, que constituyen lo que denominamos teoría de una estructura, y que en principio será distinta para cada interpretación o modelo. Sin embargo, todas las teorías tienen un núcleo común, el de las fórmulas válidas, *VAL*. Por ser verdaderas en toda estructura, estas sentencias no describen ninguna estructura en particular, sino aquello que es común a todas ellas. *¿Caracterizan algo estas sentencias?* La respuesta es afirmativa: describen la propia lógica. Por consiguiente, si logramos generarlas con facilidad habremos captado la esencia de la lógica.

Nos ocupamos ahora de la importancia práctica. Aunque contemos con la noción semántica de verdad, con frecuencia es muy difícil manejarla apelando simplemente a las condiciones de la definición. Mucho más difícil todavía es determinar si una fórmula es consecuencia de un conjunto de ellas que tomamos como hipótesis; esto es, si toda interpretación en la que las hipótesis sean verdaderas la conclusión también lo es. La razón es que en principio sería necesario comprobarlo en toda interpretación, modelo a modelo. Por fortuna hay otro modo de determinar si una fórmula es consecuencia de otras que no es la mera verificación directa de sus especificaciones semánticas: se trata de inferir o deducir la fórmula en un cálculo deductivo utilizando las hipótesis; es decir, de establecer una cadena de razonamiento –esto es, una prueba– entre premisas y conclusión. De hecho, esta forma de definir el concepto de consecuencia es incluso más adecuada a la noción intuitiva, ya que refleja el carácter discursivo del razonamiento.

Si el cálculo deductivo va a resultar útil es porque nos ayudará a no equivocarnos; no nos conducirá de hipótesis verdaderas a conclusiones falsas: será un *cálculo correcto*. Además sus reglas permitirán obtener como teoremas todas las consecuencias de un conjunto dado de hipótesis; esto es, será de aplicabilidad general, lo que denominamos un *cálculo completo*.

3. ¿Cómo se creó nuestro marco conceptual?

3.1. Gödel.

El ambiente en el que Gödel procede a tratar el asunto de la completud de la lógica de primer orden no es ya el plácido horizonte de optimismo en el que Hilbert había comenzado a difundir su programa de formalización de las matemáticas. En un artículo publicado en 1941, aunque redactado en torno a 1921-22, Post repasa la situación previa al teorema de Gödel de 1930 –el de completud– mostrando de forma bastante abierta sus dudas acerca de la existencia de un algoritmo de decisión extendible a la totalidad de la lógica de primer orden. Aunque es un texto difícil de interpretar, lo que Post evidencia es la sensación de duda e *impasse* que suele producirse cuando un investigador concienzudo es consciente de haber probado todas las opciones posibles. Post apunta hacia el agotamiento de una serie de estrategias de tipo combinatorio, cada vez más abstractas, que le pondrían finalmente en la pista del *problema de las palabras* y del tipo de soluciones negativas que años más tarde obtendrían Church y Turing de forma independiente[10].

Nos parece importante destacar este dato porque apunta a un estado de ánimo que muy seguramente era compartido por Gödel y que lleva, si nuestra opinión es correcta, a una profunda reconsideración del papel que estas nociones básicas, completud y decidibilidad, van a desempeñar en la definición de la tarea de la lógica. Una de las cuestiones más difíciles de entender del entramado formalista es, precisamente, la importancia creciente de la completud en el contexto de una prueba que depende esencialmente de la decidibilidad. Si se dispone de un algoritmo de clasificación de fórmulas, la constatación de que las reglas del cálculo producen exactamente el conjunto de fórmulas destacado por el algoritmo no parece añadir mucho valor a lo que ya se tenía. Suponemos que lo que habría que juzgar es la bondad de ese algoritmo para identificar una clase notable–y no una trivial, como la clase de las fórmulas bien formadas, por ejemplo– y que eso es algo que seguramente sólo se podría hacer examinando las propias categorías que se han empleado en la definición de dicho algoritmo. Un cálculo que no sea completo con respecto a mecanismos de decisión de origen semántico simplemente sería desechado y reemplazado a todos los efectos por ese mismo algoritmo. Es muy posible que la fijación del programa formalista, en torno al esquema *completud más decidibilidad*, tuviera que ver con la dificultad de apreciar en el cálculo indicaciones

---

10 Al comienzo de ese artículo se apresura a aclarar que no pretende en modo alguno entrar en cuestiones de prioridad.

que permitían alcanzar una correcta valoración de si el formalismo es o no exhaustivo. Este hecho sólo se podría juzgar correctamente desde la aparición de mecanismos de decisión para fórmulas –*protosemántica*– los cuales, a su vez, son deficientes como forma de exposición de una teoría. Son, por así decir, métodos *ad hoc*, que no aportarían una correcta elucidación de las constantes lógicas involucradas. La exhaustividad del cálculo, la constatación de que posee el alcance debido, sólo se obtendría mostrando que una clase de fórmulas previamente identificada –mediante un algoritmo en la protosemántica– coincide con la de sus teoremas.

Gödel, al igual que Post, debió encontrar este sutil equilibrio difícil de mantener en el contexto de la investigación en curso en el ámbito de la lógica de primer orden. Si todo nuestro empeño se centra en extender los resultados parciales obtenidos por Löwenheim y Behmann para el fragmento monádico, entonces parece que lo apropiado es conceder a ese análisis todo el valor que de otro modo se concede al cálculo. Gödel parece otorgar a los trabajos de Löwenheim y Skolem, procedentes de una tradición completamente distinta, una capacidad obvia para arrojar una buena interpretación del significado y conducta de las constantes lógicas. Dicho de otro modo, si los métodos semánticos, aún incipientes, llevan a un algoritmo de decisión basado en sus propias nociones fundamentales, entonces la completud resulta banal, de hecho, el cálculo se desvanece o trivializa, salvo como atajo para reducir la complejidad computacional de ciertas pruebas. Para que la completud resulte una propiedad realmente crítica hay que aceptar otro tipo de equilibrio. De hecho, y si se piensa bien, la completud de un cálculo sólo es relevante si se carece de un resultado previo de decidibilidad. En ese caso, y sólo entonces, el cálculo, al ajustar con la clase de las verdades lógicas, permite aportar un cierto control computacional de las mismas al permitir su enumeración efectiva como teoremas de ese cálculo.

A este nuevo modo de abordar el problema lo hemos bautizado como el dilema de Gödel y podría formularse del siguiente modo:

- O bien la semántica es decidible, en cuyo caso la completud es trivial,

- o bien, la completud es una propiedad crítica pero en tal caso no cabe obtenerla como corolario de un resultado previo de decidibilidad.

Este dilema plantea la búsqueda de un resultado de completud en términos de coste y beneficio, estrategia que creemos que Gödel supo emplear con ventaja en más de una ocasión. Si de lo que se trata es de invertir a fondo en la definición de un algoritmo de decisión para la lógica de primer orden, entonces la completud carece de valor como resultado en sí. Si, por el contrario, la completud ha de tener algún peso en el análisis del cálculo, ésta ha de obtenerse sin presuponer decidibilidad, ya que sólo entonces resulta valiosa. Para un joven matemático, recién licenciado, apostar por un objetivo con un alto valor añadido era sin duda una buena opción, mientras que insistir en una tarea –la decidibilidad– que tenía empleada a la élite de la comunidad lógico-matemática desde hacía años, y con nulos resultados, parecía poco prometedor.

Concebir una prueba de completud independiente de un algoritmo de decisión para el lenguaje era una tarea ciertamente notable en la que además podían verse comprometidos algunos de los principios más apreciados por la escuela formalista. Sin ánimo de entrar en detalles, sí creemos que merece la pena citar las propias palabras de Gödel[11]:

> "In conclusion, let me make a remark about the means of proof used in what follows. Concerning them, no restriction whatsoever has been made. In particular, essential use is made of the principle middle for infinite collections (the nondenumerable infinite, however, is not used in the main proof)"[12]

No obstante, Gödel defiende esta licencia al separar el problema de la completud de otros más directamente relacionados con los fundamentos, como es el de la consistencia de la matemática, y afirma:

> "...even if it had never been questioned that 'naive' mathematics is correct as to its content, this problem could have been meaningfully posed within this naive mathematics (unlike, for example the problem of consistency), which is why a restriction on the means

11 Gödel, K. "On the Completeness of the Calculus of Logic", 1929, en Feferman, *Collected Works*, cit.

12 *Ibid.*, p.63.

> of proof does not seem to be more pressing here that for any other mathematical problem."[13]

Aparte de la clara conciencia de estar empleando métodos que le alejan de la estrategia adoptada hasta entonces —completud como corolario de la decidibilidad— la prueba de Gödel es fuertemente dependiente de los mecanismos que pocos años atrás había ideado Löwenheim y luego refinado Skolem. Son mecanismos en los que el lenguaje de la lógica de primer orden es empleado para construir realizaciones, lo que ahora llamaríamos modelos de forma explícita. Pese a ello, Gödel nunca llega a manejar nociones semánticas que hoy consideramos básicas. Su percepción de que la completud adquiere valor sólo en el nuevo contexto y del distinto comportamiento metateórico de la verdad lógica y la noción de teorema se expresa a la perfección en las siguientes palabras:

> "Let us note that the equivalence now proved, 'valid = provable', entails, for the decision problem, a reduction of the nondenumerable to the denumerable, since 'valid' refers to the nondenumerable totality of functions, while 'provable' presupposes only the denumerable totality of formal proofs."[14]

Como ya hemos dicho, sin una clara percepción de la independencia de ambas nociones, soportada en una diferente conducta metateórica, hubiera sido muy difícil que las cosas evolucionaran en la dirección que lo hicieron posteriormente, pero tampoco hubiera sido el caso sin los trabajos de Tarski y Henkin. Es muy interesante apreciar la pervivencia de estrategias relativamente arcaicas en otros apartados de la Lógica en los que la prueba de Gödel no tenía aplicación o para los cuales no se tiene aún conceptos claros que permitan abordar el problema. Sólo tras la matematización de la semántica producida por Tarski y la generalización de la prueba de completud asociada a la prueba de Henkin las cosas pudieron exportarse a otros dominios de la investigación en Lógica, dando lugar a una de las épocas más intensas y brillantes de esta disciplina.

---

13 *Ibid.*, p.65.

14 Gödel, K., "The Completeness of the Axioms of the Functional Calculus of Logic", 1930 en *Ibid.*, p.117.

3.2. Tarski.

Sería apresurado situar en 1933[15] la definición de verdad en un modelo o estructura que actualmente utilizamos. No sólo porque en ese momento esa terminología no se empleaba[16], sino porque la definición de verdad que Tarski introdujo en esa fecha sólo le permitía hablar de verdad a secas. La interpretación de una sentencia depende del universo de cuantificación y Tarski parece reservar la palabra 'verdad' al caso en el que el universo sea la clase de todos los individuos.

La gestación del concepto de "verdad en una estructura" fue larga, según nos hace notar Hodges[17]. En un primer momento se afirmaba:

La fórmula $\forall x(Rx \rightarrow Rx)$ *es verdadera*

pero se tardó mucho más en entender y, sobre todo, en definir y precisar el significado de:

La fórmula $\forall xyx(fxfyz = f\ fxyz)$ *es verdadera en un grupo*

La cual no terminó de cuajar en una definición adecuada hasta 1957, y lo hizo en un artículo conjunto con Vaught [18]. Gracias a la nueva definición se puede transitar del *lenguaje a las estructuras* en ambas direcciones; esto es, a partir de una estructura $\mathcal{A}$ definir el conjunto de las sentencias verdaderas en ella, $Th(\mathcal{A})$ y a partir de un conjunto Γ de sentencias definir la clase de los modelos de ese conjunto, $Mod(\Gamma)$.

Veremos a continuación que la transformación importante se produjo cuando se fue consciente de esto: *una misma teoría puede recibir distintas interpretaciones o modelos ya que un mismo lenguaje puede ser empleado para referirse a dominios distintos.*

3.2.1. La aportación de Tarski de 1933.

El problema que se plantea Tarski en su artículo[19] es el de la definición del concepto de *"sentencia verdadera"*. Hay definiciones que

15 Tarski, A., "On the Concept of Logical Consequence"*,* 1936 en Corcoran, J. (ed.), *Logic, Semantics and Metamathematics*, Hackett Publishing Company, 1983

16 El nombre de *Teoría de Modelos* fue utilizado por primera vez por Tarski en 1954, en *The International Congress of Mathematicians* celebrado en Cambridge, Massachusetts.

17 Hodges, W., "Truth in a structure"*, Proceedings of Aristotelian Society*, 1986, p.135- 151.

18 Tarki, A. y Vaugth, "Arithmetical extensions of relational systems", *JSL*, 1957.

19 Cf. Tarki, A., "On the Concept of Logical Consequence", 1936, en Corcoran, J.

pretenden captar el significado intuitivo del término en el uso cotidiano y otras que meramente aspiran a fijar una norma de uso en un contexto científico, pero restringido. El propio Tarski admite, en un artículo de divulgación para *Scientific American* del año 1969[20], que en el caso que nos ocupa el objetivo es mixto. La intuición que se pretende recoger con la definición está en sintonía con la Metafísica de Aristóteles, al que cita|:

> "Decir de lo que es que no es, o de lo que no es que es, es falso, mientras que decir de lo que es que es, o de lo que no es que no es, es verdadero."

La explicación tópica y el ejemplo paradigmático nos lo proporciona también en ese artículo: *"La sentencia 'La nieve es blanca' es verdadera si y sólo si la nieve es blanca"*. Esto es, propugna una definición con esta forma:

"La sentencia 'p' es verdadera si y sólo si p"

Sobre una definición de este tipo planea la duda de si estamos incurriendo en un círculo vicioso, que sería preciso disipar. El problema es especialmente delicado cuando en la expresión p aparece la palabra *"verdadero"*, pero ese no es nuestro caso, no necesitamos un lenguaje universal en el que se deba poder expresar la verdad de sus propias sentencias. De hecho, el concepto de verdad que estamos intentando esclarecer afecta a los lenguajes formales, mucho más restringidos, rigurosos y estables que la lengua natural. Distinguimos entre el *lenguaje objeto*, del que queremos definir su concepto de verdad, y el lenguaje en el que daremos esa definición, el *metalenguaje*. De esta forma evitamos la autorreferencia y escapamos a las paradojas denominadas *"semánticas"*, como la del *mentiroso*.

Para Tarski el metalenguaje es *teoría de tipos*, actualmente nuestro metalenguaje es una combinación de *teoría de conjuntos* y de lengua natural (español).

(ed.) *Logic, Semantics and Metamathematics*, Hackett Publishing Company, 1983.

20 Cf. Tarski, A. "Truth and proof", en *Scientific American*, vol. 220, N° 6 (Traducción de Carlos Oller en: *Escritos de Lógica y Semántica.* Oficina de Publicaciones de Ciclo Básico Común, Universidad de Buenos Aires, 1996)

Como explica Wilfrid Hodges[21], Tarski exige a la definición de *sentencia verdadera* que sea *formalmente correcta* y ello lo que significa es que debe tener esta forma

Para cada p, Verdadero (p) si y sólo si φ(p)

donde *"Verdadero"* no aparece en *φ* y la equivalencia pueda establecerse en el metalenguaje. Finalmente, también debe ser *materialmente adecuada* y esto lo que implica es que los objetos que verifican *φ* deberían ser los que intuitivamente cuentan como sentencias verdaderas del lenguaje formal y que para probarlo se pudiera hacer en el metalenguaje, con sus axiomas. A primera vista esto sugiere que en el metalenguaje tenemos ya una definición de *sentencia verdadera de L*, lo que presagia un regreso infinito. Tarski lo evita proponiendo una colección infinita de sentencias del estilo

φ(p) si y sólo si ψ

donde *p* es el nombre de una sentencia de *L* y *ψ* es su copia en el metalenguaje, que ha de ser más expresivo que el propio L.

Para definir ese concepto de manera satisfactoria para nuestro lenguaje formal, que contiene infinitas fórmulas recursivamente generadas, necesitamos una definición recursiva y en donde se otorguen valores de verdad a los componentes de las sentencias que podrían ser fórmulas abiertas. Finalmente, no se define directamente el concepto de verdad, sino indirectamente, a través de la definición recursiva de *satisfacibilidad*. El propósito del artículo era mostrar que la relación *'A satisface φ'* es definible matemáticamente, en teoría de conjuntos diríamos ahora:

¿Es esa la definición que conocemos y usamos habitualmente?

Básicamente sí, las fórmulas complejas se evalúan usando sus componentes y en el caso de las atómicas se emplea su copia conjuntista que tenemos en el metalenguaje. Sin embargo, hay una diferencia significativa. En su artículo de 1933 Tarski considera que los signos de los lenguajes con los que tratamos son de dos clases: (1) *Constantes*, cuyo significado es fijo y (2) *Variables*, cuyo valor se les asigna. Hay otra

21 Hodges, W., *Tarski´s Truth Definitions*, Standford Encyclopedia http://www.science.uva.nl/-seop/entries/model-theory.

diferencia importante anteriormente señalada y es que nosotros exigimos que el universo de cuantificación sea un conjunto y permitimos una gran variabilidad de universos.

¿Podemos con esta definición hablar ya de modelos, comparar estructuras?

No es todavía posible, pensad en un ejemplo del propio Tarski: un universo de conjuntos y la relación de *'ser un subconjunto'* en donde dicha relación binaria la considera una constante, esto le impide comparar esta estructura con otras estructuras relacionales

3.2.2. La definición de verdad y la Teoría de Modelos.

En teoría de modelos consideramos que nuestro lenguaje formal contiene básicamente tres tipos de signos: (1) *Constantes lógicas,* (2) *variables* y (3) *constantes no lógicas* (relatores, functores, constantes individuales). La novedad la plantean las de la última categoría, si tuviéramos que adaptarlas a las clases del artículo de 1933 tendríamos este dilema: o bien las consideramos constantes y por lo tanto hablamos cada vez de verdad en un modelo único, o bien son variables y su interpretación se modificará en cada modelo. En realidad tomamos la segunda opción aunque las llamamos *constantes*; lo son de hecho, pero en el marco restringido de una estructura o modelo. De esta manera el concepto de verdad se relativiza pasando a *ser verdad en una estructura*.

Una estructura o modelo $\mathcal{A}$ proporciona un universo **A** y una colección de individuos, funciones y relaciones definidas sobre ese universo que servirán de interpretación a las constantes no lógicas. En la estructura $\mathcal{A}$ los designadores (términos sin variables) de L denotan individuos de **A** mientras que las sentencias (fórmulas sin variables libres) son verdaderas o falsas en $\mathcal{A}$. Pero para establecer el valor de verdad de una fórmula cualquiera necesitamos previamente asignar valores a las variables y esto se hace definiendo asignaciones; esto es, una función F que otorga un elemento del universo a cada variable. Una interpretación se define como un par, $\mathfrak{I} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$ y en ella cada fórmula φ será verdadera o falsa.

Distinguimos entre:

1. ser válida, y escribimos

$$\models \forall x(Rx \rightarrow Rx)$$

que quiere decir, que para cada modelo $\mathcal{A}$ la sentencia es verdadera en él, formalmente: $\models \forall x(Rx \rightarrow Rx)$, para cada $\mathcal{A}$. Conforme a las primeras definiciones de Tarski, sería un caso típico de sentencia verdadera. Hay que pensar que para él el universo es la clase universal $\mathcal{U}$.

2. ser verdadera en un grupo, $\mathfrak{G}$

$$\models_{\mathfrak{G}} \forall xyz\,(fxfyz = f\,f\,xyz)$$

Donde $\mathfrak{G}$ es la clase formada por todos los grupos

que significa que $\mathcal{G} \models \forall xyz\,(fxfyz = f\,f\,xyz)$ para cada $\mathcal{G} \in \mathfrak{G}$.

Esto es, *validez es verdad en toda estructura.*

En *teoría de modelos* el interés se desplaza de la lógica (cifrada en el conjunto *VAL* de las fórmulas válidas) y sus cálculos deductivos a las teorías; esto es conjuntos Γ cerrados bajo deducibilidad, y frecuentemente con unas características matemáticas reconocibles. Claramente la lógica es una teoría, la menor.

La transformación más importante se produjo cuando se fue consciente de que una misma teoría puede recibir distintas interpretaciones o modelos y que los teoremas que demostramos en una teoría axiomática automáticamente pasan a ser verdaderos en cualquier modelo de esos axiomas. Se necesitó un grado de abstracción considerable, que incluye el darse cuenta de que la naturaleza de los objetos que constituyen el universo de una estructura es irrelevante y que lo determinante son las relaciones que mantienen dichos objetos entre sí. En esta rama del saber ya habían sido capaces de dar un salto desde las estructuras matemáticas comunes, como los naturales cuyo manejo aprendimos desde niños, hasta los grupos, anillos y cuerpos y el álgebra abstracta. La línea divisoria entre álgebra universal y teoría de modelos es difusa. Pero semejante abstracción tiene como premio inmediato una gran economía de esfuerzo. En el libro de Chang Keisler[22], sus autores establecen la ecuación siguiente:

Teoría de Modelos = Álgebra Universal + Lógica

---

[22] Cf. Chang, C. y Keisler, J., *Model Theory*, Amsterdam, Holland, North Holland Publishing Company, 1977 (reedición 1990).

¿Cómo accedemos a una teoría?

Frecuentemente la teoría que nos interesa es lo que a veces se denomina teoría de una estructura, o de una clase de estructuras. Es decir, tenemos una estructura $\mathcal{A}$ y queremos estudiar el conjunto de todas las sentencias verdaderas en $\mathcal{A}$. En estos casos, la descripción que hacemos de la teoría es sencillamente esa: sentencias de primer orden verdaderas en $\mathcal{A}$ nuestra estructura.

$$Th(\mathcal{A}) = \{\varphi \in Sent\,(L) \mid \mathcal{A} \models \varphi\}$$

La pregunta inmediata es, *¿podemos generar a ese conjunto a partir de un conjunto finito o recursivo de axiomas, usando el cálculo?*

Igualmente, hay teorías que ya se definen desde el principio de manera axiomática y consideramos que las sentencias de nuestra teoría son sus consecuencias lógicas: la teoría Γ es definida a partir de un $\Delta \subseteq \Gamma$ finito o recursivo; esto es, estipulando $\Gamma = Con(\Delta)$. Gracias a la abstracción y generalidad que la teoría de modelos permite, podemos indagar la naturaleza de $Mod(\Delta)$, la clase de todos los modelos de Δ. Ahora nos preguntamos, *¿qué similitud guardan entre sí esos modelos? ¿hay construcciones interesantes que nos permitan definirlos?*

Un programa de investigación muy fecundo que puso en marcha Tarski fue el de eliminación de cuantificadores; se trata de un método de análisis de estructuras capaz de proporcionar: (1) un conjunto pequeño de fórmulas básicas, (2) una descripción de los conjuntos definibles en la estructura, (3) una axiomatización completa de las sentencias verdaderas en la estructura y (4) un algoritmo para decidir la verdad en la estructura.

3.3. Completud lógica versus completud de una teoría.

Tal y como se define este concepto para teorías, la completud es una propiedad sintáctica, relacionada con el cálculo y sus reglas; la de ser maximal, estar *al completo*. Por otra parte, la completud del cálculo significa la equivalencia entre la noción sintáctica y semántica de consecuencia. Hay quienes prefieren reservar la palabra completud para teorías y usar en los cálculos *suficiencia*. Creemos preferible mantener el vocablo completud en ambos casos, porque son formulaciones de un mismo problema, al menos en su génesis. Y esta es justamente nuestra tesis: *que la noción completud de una lógica tal y como la entendemos hoy nació como una generalización del concepto de completud de una teoría.*

3.3.1. Completud de una teoría.

El marco del denominado *programa de Hilbert* lo que se propugnaba era definir axiomáticamente a todas las teorías matemáticas y demostrar para cada una de ellas estas dos propiedades: (1) Δ *es completa* y (2) Δ *es consistente.*

La propiedad de completud de una teoría está relacionada con la de axiomatizabilidad, y no todas las teorías la comparten. En particular, si Δ es una teoría completa la clase de sus modelos está bastante bien definida ya que dos cualesquiera son elementalmente equivalentes.

Definición 1 Δ ***es completa*** *syss para cada* $\varphi \in \Delta : \Delta \vdash \varphi$ o $\Delta \vdash \neg\varphi$

Ahora intentaremos hacer plausible nuestra tesis de que la noción de completud de una lógica, tal y como la entendemos hoy, nació como una generalización del concepto de completud de una teoría. Y no sólo porque un cálculo lógico es él mismo una teoría, algo obvio en aquel tiempo en el que los cálculos eran axiomáticos, con axiomas que rigen el comportamiento de las constantes lógicas y los cuantificadores, y sus reglas de inferencia La idea surge de la lectura de dos artículos de Henkin de 1967[23] en los que claramente relaciona ambos conceptos.

El concepto puente entre las nociones de *completud de una teoría* y *completud de una lógica* es el de "*el conjunto de sentencias* Δ *es completo respecto de la clase de modelos* $\mathfrak{E}$".

Si se trata de una teoría Δ que axiomatiza a una estructura $\mathcal{A}$ tenemos que Δ *es completa* (para $\mathcal{A}$) *si para cada* $\varphi \in Sent : \mathcal{A} \models \varphi$ *implica* $\Delta \vdash \varphi$.

Normalmente estamos interesados en una estructura o en una clase de estructuras —por ejemplo, $\mathcal{A}$ o $\mathfrak{G}$ — y en un lenguaje apropiado proponemos un conjunto de axiomas Δ que cifre las características de la estructura o de la clase. Por descontado, en Δ ponemos sólo sentencias verdaderas en las estructuras consideradas, pero *¿están todas las precisas?*

---

23 Henkin, L. "Truth and Provability" y "Completeness" en Morgenbesser, S. (edi.), *Philosophy of Science Today,* New York, Basic Books, 1977.

Sea $\mathcal{A}$ la estructura en cuestión; la pregunta que nos formulamos es *¿se cumple que si* $\mathcal{A} \models \varphi$ *entonces* $\Delta \vdash \varphi$, *para cada* $\varphi \in$ *Sent*? La pregunta reza *¿es* $Th(\mathcal{A}) = Con(\Delta)$?, donde $Con(\Delta)$ es el conjunto de consecuencias de Δ, pero definido con $\vdash$. Así que podemos expresar *la completud de* Δ *respecto* $\mathcal{A}$ mediante la igualdad: $Th(\mathcal{A}) = Con(\Delta)$. En esta situación Δ es también una *teoría completa* en el sentido de la definición 1.

El concepto de completud de una teoría está muy estrechamente vinculado al de equivalencia elemental y al de decisión. Entre 1920 y 1930 se descubrieron muchas teorías completas (esto es, definidas axiomáticamente y juzgadas respecto de un único modelo): la de Langford, que consideraba la estructura cuyo universo son los números racionales con la relación de orden, convenientemente axiomatizada; la aritmética elemental de Presburger; la de Skolem, que consideraba la operación de multiplicación. En todos los casos la demostración de completud proporcionaba un procedimiento de decisión de teoremas.

Vamos a extender este concepto de completud relativa al caso en el que lo que nos interesa no es una estructura, sino una clase de estructuras $\mathfrak{E}$. Empezamos proponiendo unos axiomas Δ verdaderos en cada estructura de $\mathfrak{E}$. ¿Se verifica que si $\mathcal{B} \models \varphi$ para cada $\mathcal{B} \in \mathfrak{E}$ entonces $\Delta \vdash \varphi$, para cada $\varphi \in$ *Sent*? Es decir, ¿es $Th(\mathfrak{E}) = Con(\Delta)$?

Cuando la respuesta es afirmativa podemos decir que Δ *es completo respecto de la clase de estructuras* $\mathfrak{E}$. Nuevamente podemos expresar la *completud de* Δ *respecto de* $\mathfrak{E}$ mediante la igualdad $Th(\mathfrak{E}) = Con(\Delta)$. En esta situación Δ no tiene porqué ser una teoría completa en el sentido de la definición 1.

3.3.2. Completud de una lógica.

Suponed que nuestra clase de estructuras es tan amplia que incluye a todas las de una cierta signatura; esto es, $\mathfrak{T}$ es la clase de todas las estructuras de esa signatura. Una sentencia verdadera en todas ellas es lo que llamamos fórmula válida —$Th(\mathfrak{T}) = VAL$— y preguntarnos si el conjunto $\varnothing$ de fórmulas[24] es completo en la clase

[24] Estamos pensando en un cálculo que sólo posee reglas de inferencia, sin axiomas. Si fuera axiomático, en vez $\varnothing$ pondríamos un Δ formando por esos axiomas.

de todas las estructuras es justamente preguntarse si el cálculo es completo en sentido débil; esto es

$$\mathcal{A} \models \varphi \text{ para cada } \mathcal{A} \in \mathfrak{T}\text{, entonces } \varnothing \vdash \varphi\text{, para cada } \varphi \in \mathit{Sent}$$

lo que equivale a que

$$\mathit{Th}(\mathfrak{T}) = \mathit{VAL} = \mathit{TEO} = \mathit{Con}(\varnothing)$$

O sea que

$$\varnothing \textit{ es completo respecto de la clase } \mathfrak{T} = \textit{completud débil}$$

La completud fuerte significa que todo conjunto Γ es completo respecto de la clase formada por todos sus modelos, *Mod*(Γ). En este caso, sea

$$\{\mathcal{A} \in \mathfrak{T} \mid \mathcal{A} \models \Gamma\} = \mathit{Mod}(\Gamma)$$

ahora que Γ es completo respecto de *Mod*(Γ) significa

$$\mathcal{A} \models \varphi \text{ para cada } \mathcal{A} \in \mathit{Mod}(\Gamma)\text{, entonces } \Gamma \vdash \varphi\text{, para cada } \varphi \in \mathit{Sent}$$

lo que equivale a que

$$\mathit{Th}(\mathit{Mod}(\Gamma)) = \mathit{Con}(\Gamma)$$

O sea que

$$\forall\Gamma \subseteq \mathit{Sent}(L)(\Gamma \textit{ es completo respecto de la clase } \mathit{Mod}(\Gamma)) = \textit{completud fuerte}$$

3.4. Henkin.

El teorema de completud establece la adecuación entre el cálculo deductivo y la semántica. Gödel lo había resuelto positivamente para la lógica de primer orden y negativamente para cualquier sistema lógico capaz de contener la aritmética. El cálculo lambda para la teoría de tipos, con la semántica habitual sobre una jerarquía estándar de tipos, era capaz de expresar la aritmética y por consiguiente no podía ser otra cosa que incompleto. Henkin demostró que si se interpretan las fórmulas de una manera menos rígida, aceptando otras jerarquías de tipos que no tengan necesariamente que contener a todas las funciones, sino sólo a las definibles, se prueba fácilmente que toda consecuencia de un conjunto de hipótesis es demostrable en el cálculo. Las fórmulas válidas en esta nueva semántica, llamada *general*, se reducen hasta coincidir con las generadas por las reglas del cálculo.

Los teoremas de completud de Henkin constituyen su tesis doctoral, defendida en 1947 bajo la dirección de Alonzo Church. Publicó dos artículos en el *Journal of Symbolic Logic*, el primero sobre completud de la lógica de primer orden[25], en 1949, y el segundo sobre completud en teoría de tipos[26], en 1950. El orden de publicación es inverso al de descubrimiento, ya que su prueba de completud de la lógica de primer orden surgió al darse cuenta de que podía modificar la obtenida para teoría de tipos. Este hecho creemos que es de enorme relevancia, pues el esfuerzo de abstracción necesario para la primera demostración le proporcionó una gran perspectiva que le permitió abandonar algunos prejuicios y así efectuar cambios decisivos para su descubrimiento. Por ejemplo, él habla claramente de modelos, y la naturaleza de los objetos que los constituyen es de índole formal; en el caso primero para construir la jerarquía de tipos confía en la capacidad generadora de las funciones de abstracción del cálculo lambda y en el segundo, simplemente en la naturaleza enormemente descriptiva de los conjuntos máximamente consistentes.

El modelo de su prueba de completud de teoría de tipos no tiene ya como universo a los números naturales, algo que parecía esperarse en ese momento, y eso requiere una visión abstracta y moderna, una visión de *teoría de modelos*. Todavía hoy se encuentran en los congresos personas que critican esa prueba porque la construcción del modelo les parece artificiosa, personas a las que la naturaleza de los objetos que constituyen el universo del modelo les parece relevante. Por otra parte, los *modelos generales* no son, desde nuestro punto de vista, unas construcción *ad hoc* carente de naturalidad matemática, ya que simplemente admiten a las jerarquías de conjuntos cuyos universos pueden ser construidos y descritos con nuestro lenguaje formal, abriendo así la puerta al universo de conjuntos constructible. Pero justamente esa naturaleza algebraica y estructural de su prueba es la que la hace

---

25 Cf. Henkin, L., "The Completeness of the First Order Functional Calculus", *JSL*, vol. 14, 1949, pp. 159-166.

26 Cf. Henkin, L., "Completeness in the Theory of Types", *JSL*, vol. 15, 1950, pp. 81- 91.

adaptable a muchas lógicas, no sólo a la teoría de tipos y a la lógica de primer orden para las que él las diseñó.

Al comienzo del artículo[27] Henkin menciona los resultados de Gödel: Tanto el de completud de la lógica de primer orden

> "...each formula of the calculus is a formal theorem which becomes a true sentence under one of a certain intended class of interpretation of the formal system"[28]

Como el de incompletud de la Lógica de Segundo Orden

> "... no matter what (recursive) set of axioms are chosen, the system will contain a formula which is valid but not a formal theorem.[29]

Por supuesto, con semántica estandar

> "...the individual variables are interpreted as ranging over an (arbitrary) domain of elements while the functional variables of degree n range over all sets of ordered n-tuples of individuals"[30]

Y anuncia que el problema tiene solución si se admiten modelos no estándar

> "... there is a wider class of models ... redefine the notion of valid formula... second order calculus is complete: a formula is valid if and only if it is a formal theorem."[31]

Como es bien sabido, la prueba de completud de Henkin, tanto la de teoría de tipos como la de la lógica de primer orden, se basa en encontrar un modelo para cada conjunto de sentencias Γ que tenga la propiedad de consistencia sintáctica. La demostración se hace básicamente en dos pasos:

1. Se extiende el conjunto consistente a uno máximamente consistente –y ejemplificado, en la de primer orden–
2. Se construye el modelo que las fórmulas de este conjunto máximamente consistente están describiendo, ya que un con-

[27] *Ibidem.*
[28] *Ibid.,* p. 81.
[29] *Ibidem.*
[30] *Ibidem.*
[31] *Ibid.,* p. 81-82.

junto máximamente consistente es una descripción pormenorizada de una estructura.

Es interesante saber cómo lo descubrió, para lo que recomendamos vivamente la lectura de su artículo de 1996[32]. Si a ello añadimos la lectura de los artículos de 1949 y 1950[33], basados en su tesis doctoral, constatamos que fue actor y parte del cambio del marco conceptual que nos ha permitido llegar al canon actual.

El lenguaje de Church de teoría de tipos con su signo λ de abstracción funcional, que permite nombrar a las funciones y distinguir la función como objeto matemático del conjunto de sus valores, le atrajo sobremanera. La definibilidad era entonces un tema estrella, pero hay que tener en cuenta que la tesis de Church, identificando las funciones recursivas con las definibles con el operador lambda ya se había formulado y que Henkin era alumno suyo. La riqueza expresiva del cálculo lambda, para teoría de tipos, contrastaba con la del cálculo de Gödel denominado PM[34] que no permite nombrar a las funciones mencionadas, aunque naturalmente las fórmulas con variables libres definen conjuntos y relaciones y funciones.

Dice Henkin[35]:

> "I decided to try to see just which objects of the hierarchy of types did have names in $\mathcal{T}$."[36]
>
> …
>
> "As I struggled to see the action of functions more clearly in this way, I was struck by the realization that I have used λ conversion, one of the formal rules of inference in Church's deductive system for the language of the Theory T. All my efforts had been directed toward interpretations of the formal language, and now my attention was suddenly drawn to the fact that these were related to the formal deductive system for that language."[37]

---

32 Cf. Henkin, L., "The Discovery of my Completeness Proofs, Dedicated to my Teacher, Alonzo Church, in his 91st year", *Bulletin of Symbolic Logic,* vol. 2, Number 2, June 1996.

33 Cf. Henkin, "Completeness in the…, cit… y Henkin, "The Completeness of…, cit.

34 Denominó PM a este cálculo por ser básicamente el de *Principia Mathematica.*

35 Cf. Henkin, L., "The Discovery of…, cit.

36 Cf. Henkin, L., "The discovery of…, cit., p. 146.

37 *Ibid.,* p. 150.

Es decir, pretendía representarse mentalmente las funciones de la jerarquía de tipos que pueden ser nombradas mediante expresiones con lambda. Para visualizarlo, consideró una jerarquía de tipos cuyo universo de individuos fuera el de los números naturales y con una constante como nombre para el cero y otra para la función del siguiente. En el universo de subconjuntos del universo de individuos claramente habría objetos tanto con nombre como sin él, porque con un universo de individuos numerable, el de conjuntos de individuos es supernumerable, pero el de los conjuntos que pueden ser nombrados es sólo numerable. Se embarcó en el proceso recursivo de encontrar un objeto de la jerarquía de tipos como denotación para cada fórmula y las dificultades aparecieron con el selector $\iota_{\alpha(0\alpha)}$ cuya interpretación debía ser una función de elección.

"However, when I tackled the problem of describing some particular choice function to serve as denotation of $\iota_{(01)(0(01))}$, I was stumped."[38]

"Could I make precise what it might mean to say that it is "intrinsically impossible" to specify any particular choice function for non empty sets of real numbers? No, I really couldn't."[39]

Desarrolló la jerarquía de los objetos que poseen nombre en la jerarquía de tipos y se dio cuenta que para eliminar repeticiones, estaba usando las reglas de conversión lambda y que por lo tanto implicaba a la sintaxis y al cálculo. Concretamente, para identificar a los objetos nombrados mediante M^{a} y N^{a} usaba al cálculo como criterio; en especial que, $\vdash M^{a} = N^{a}$. "In particular, I saw that using the symbol $\vdash$ for formal probability (or derivability) as usual, we can define for each type symbol *a* a domain $\mathcal{D}'_{\alpha}$."[40] en el que cada sentencia del lenguaje formal adquiere denotación, cada expresión funcional denota una función de la jerarquía y las expresiones deductivamente equivalentes denotan el mismo objeto. Para conseguirlo los dominios están formados por clases de equivalencia de fórmulas,

$$\mathcal{D}'_{\alpha} = \{[M^{a}] \mid M^{a} \text{ es una fórmula de tipo } \alpha\}$$

siendo

38 *Ibíd.*, p. 147.
39 *Ibíd.*, p. 148.
40 *Ibíd.*, p. 150.

$$[M^a] = \{N^a \mid \vdash M^a = N^a\}$$

Finalmente, la prueba se cerró al darse cuenta de que para que el universo de los objetos nombrados mediante proposiciones (el de los valores de verdad) se redujera a sólo dos habría de ampliar los axiomas hasta que constituyeran un conjunto máximamente consistente, de suerte que las clases de equivalencia inducidas por la relación $\vdash M^a = N^a$ se redujeran a dos. "In particular, if M^0 is a Gödel sentence such that neither $\vdash M^0$ nor $\vdash \sim M^0$, then $(0_1 = 0_1)'$, $(\sim 0_1 = 0_1)'$, and $M^{0\prime}$ are three distinct elements of $\mathcal{D}'_0$."[41] Inmediatamente se dio cuenta de que así había formulado y probado el que en su tesis sería el Teorema VI

> "If S is any formally consistent set of $\mathcal{T}$. sentences, then there is a denumerable general model $\mathcal{M}$ of $\mathcal{T}$. for which each sentence of S is true. (Each domain $\mathcal{D}_n$ of $\mathcal{M}$ is denumerable."[42]

del que se seguía un teorema análogo al de Gödel de 1930, de completud para la teoría de tipos. Para un cálculo semejante, denominado PM, Gödel había demostrado en 1931 su teorema de incompletud. Obviamente no hay contradicción entre ambos resultados porque Henkin admite modelos no estándar para interpretar las fórmulas.

La idea ahora nos parece muy sencilla: El conjunto de las fórmulas válidas es tan grande porque el concepto de estructura estándar es demasiado restrictivo. Si aceptamos como estructuras adecuadas para la teoría de tipos a las estructuras no estándar el conjunto de las fórmulas válidas se reduce. Se admiten estructuras donde el universo de conjuntos de individuos, donde tomarán valores las variables de predicados monarios, pueda ser un subconjunto del conjunto potencia del universo de individuos; y de forma similar para el de conjuntos de conjuntos, etc. No obstante, si la selección de las relaciones que vayamos a incluir en esos universos es dejada completamente al arbitrio, las reglas del cálculo lambda no funcionarían bien en dichos modelos. Dicho de otra forma, el axioma de comprensión podría fallar; es decir, algunas relaciones definibles mediante fórmulas del lenguaje podrían haberse quedado fuera. Para que el cálculo sea correcto, necesitamos la semántica de *modelos generales* de Henkin; esto es, los universos de la estructura deben estar cerrados bajo definibilidad.

---

41 *Ibid.,* p. 151.
42 *Ibid.,* p. 141.

Curiosamente, la prueba de completud de la lógica de primer orden[43] la obtuvo posteriormente, readaptando el argumento encontrado para la teoría de tipos. El modelo se construye también a partir de la extensión del conjunto de sentencias originales a un conjunto máximamente consistente, y donde en la prueba de teoría de tipos usó el selector para ejemplificar enunciados existenciales, ahora se da cuenta de que puede simplemente utilizar constantes nuevas y que esas servirán de elementos del universo; haciéndolas así jugar un doble papel, como elementos del lenguaje y como objetos del universo de individuos.

> "In fact we take as our domain $\mathfrak{I}$ simply the set of individual constants of S_ω and we assign to each such constant (considered as a symbol in an interpreted system) itself (considered as an individual) as denotation."[44]

Cuando la prueba se realiza para un lenguaje de primer orden con igualdad se deben usar clases de equivalencia.

Cabe destacar, y el propio Henkin[45] lo hace, la naturaleza no constructiva de la prueba, viniendo él de una tradición tan fuertemente ligada a ella como la que Church encarnaba. Es significativo que enmarque sus resultados en la entonces naciente disciplina de la teoría de modelos y constatar que su formación algebraica le permitió tener esa visión abstracta que está en la base de sus descubrimientos.

> "The ideas that fed my discovery of this proof were mostly those I found in the teachings and writings of Alonzo Church. This may seem curious, as his work in logic, and his teaching, gave great emphasis to the constructive character of mathematical logic, while the model theory to which I contributed is filled with theorems about very large classes of mathematical structures, whose proofs often by pass constructive methods."[46]

4. *Conclusiones.*

El origen de esta investigación es la extrañeza ante la forma en que algunas de las nociones que ahora manejamos eran empleadas durante la primera mitad del siglo XX. En otras ocasiones lo sorprendente no es

---

43 Cf. Henkin, "The Completeness of…, cit.
44 *Ibid.,* p. 163.
45 Cf. Henkin, L., "The discovery of…, cit.
46 *Ibid.,* p. 127.

siquiera el uso que se hace ellas, sino su ausencia en contextos que parecen totalmente indicados. No estamos seguros de haber llegado a entender perfectamente todos los matices y circunstancias que rodean al asunto de la completud en Lógica pero sí nos parece que hemos empezado aproximarnos a parte de la historia real de esta noción. En realidad se podría decir que hemos descubierto que tenía una historia y que merecía la pena dejar que nos la contara. Es evidente que no hemos pretendido en esta ocasión discutir todo el detalle técnico que acompaña a nuestro análisis, no se trataba de eso. En su lugar hemos intentado explicar y explicarnos tres pequeños problemas que esperamos hayan sido reconocidos por nuestros lectores como parte de su propia experiencia. El primero consiste en la aparente naturalidad con la que Gödel aborda una prueba de la completud de la lógica de primer orden en ausencia de un resultado previo de indecidibilidad. De hecho, sorprende la forma tan peculiar de evitar ese punto y la reinterpretación que inmediatamente hace del valor de su resultado como una especie de premio de consolación para las aspiraciones de la lógica de primer orden. El segundo punto tiene que ver con la misma definición de la completud como propiedad de un cálculo. Hemos visto que hasta consolidarse esa noción y tomar distancia de la original, la que se predicaba de teorías, tienen que darse una serie de pasos en los que el protagonismo de Tarski y su modo de ver las cosas es obvio. Este proceso coincide con un aumento en el nivel de abstracción en la relación del lenguaje con respecto a la clase de estructuras a las que se aplica, y que es, precisamente, el impulso característico de la teoría de modelos. El tercer problema se refiere al peculiar modo en que Henkin termina el proceso de generalización iniciado por Tarski desde un punto realmente insospechado: el análisis de la teoría de tipos. Y también la manera en que todo esto hace que resulte fácil asumir los componentes no constructivos de la prueba dentro de una tradición fuertemente determinada por el ideal de solubilidad de todo problema matemático defendido por Hilbert en los comienzos de esta breve pero intensa historia.

Universidad de Salamanca
mara@usal.es
Universidad Autónoma de Madrid
enrique.alonso@uam.es