

UN MÉTODO DE ACOUPLE PARA MEF – MEC PARA ANÁLISIS DE INTERACCIÓN SUELO - ESTRUCTURA

Katherina Rojas¹, Lutz Lehmann², Miguel Cerrolaza¹

¹ *Instituto Nacional de Bioingeniería, Universidad Central de Venezuela (Venezuela)*

E-mail: katherina.rojas@inabio.edu.ve, miguel.cerrolaza@inabio.edu.ve

² *Institute of Applied Mechanics, Tech. University of Braunschweig (Germany)*

E-mail: lutz-o.lehmann@tu-bs.de

RESUMEN

El Método de los Elementos Finitos y el Método de los Elementos de Contorno son las herramientas numéricas más utilizadas para análisis en mecánica de sólidos. Cada uno de estos métodos tiene sus ventajas y desventajas en diferentes casos. El MEF es adecuado para análisis de dominios finitos con materiales no homogéneos y comportamiento no lineal, mientras que MEC ofrece ventajas en el análisis de dominios infinitos con materiales homogéneos y comportamiento lineal. En este trabajo se presenta un acople iterativo del método de los elementos finitos y el método de los elementos de contorno. El dominio del problema es dividido en dos subdominios, donde cada subdominio es analizado por separado y sólo la información en la interfase es comunicada entre los dos subdominios. El ensamble y análisis de un sistema de ecuaciones general es evitado, obteniéndose ventaja de las características de las matrices, ya que el sistema de ecuaciones en el método de los elementos finitos es simétrico. Los resultados numéricos obtenidos concuerdan satisfactoriamente con resultados obtenidos por otros autores.

Palabras Claves: Elementos Finitos, Elementos de Contorno, Acople Iterativo, Elastodinámica.

A FEM-BEM COUPLING METHOD FOR SOIL – STRUCTURE INTERACTION ANALYSIS

ABSTRACT

The Finite Element Method and the Boundary Element Method are the most used numerical tools for solid mechanics analysis. Each one of these methods has advantages and drawbacks in different cases. FEM is well suited for finite domains with inhomogeneous materials and non linear behaviour while BEM offers advantages when dealing with infinite domains displaying homogeneous materials and linear behaviour. An iterative coupling of the Finite Element Method and the Boundary Element Method is presented. The domain of the problem is divided in two subdomains, where each subdomain is analyzed separately and only the interface information is exchanged between both subdomains. The assembly and solution of a general equation system is avoided, thus obtaining full advantage of the matrices characteristics, since the system of equations is symmetric in FEM. Numerical results compare well with other available numerical results.

Keywords: Finite Elements, Boundary Elements, Iterative Coupling, Elastodynamic.

1. INTRODUCCIÓN

En diferentes campos de la ingeniería, el Método de los Elementos Finitos y el Método de los Elementos de Contorno son utilizados frecuentemente como poderosas herramientas de análisis y su acople ha sido tema de gran interés a lo largo de más de dos décadas. Cada uno de estos métodos tiene su área específica de aplicación. El Método de los Elementos Finitos, por ejemplo, es especialmente utilizado para el análisis de problemas que involucran inhomogeneidad y comportamiento no lineal, mientras que el Método de los Elementos de Contorno presenta ventajas en el manejo de problemas

donde se consideran dominios infinitos o semi infinitos, como por ejemplo problemas de interacción suelo – estructura o acústica. Sin embargo, para problemas que involucran subregiones con diferentes características, parece natural emplear la combinación de MEF y de MEC en un solo modelo computacional, el cual usa las ventajas de ambos métodos. Esto se realiza mediante la descomposición del dominio en subdominios, los cuales, dependiendo de las características que cada uno de éstos presente, es modelado con MEF o con MEC.

La diferencia más notable entre MEF y MEC, y una de las ventajas más importantes es la discretización. En el MEF se discretiza todo el dominio, mientras que en el MEC, la discretización se limita al contorno solamente. Dependiendo de la complejidad de la geometría y de los casos de carga a utilizar, esto puede representar un gran ahorro de tiempo en la creación y modificación de una malla. Desafortunadamente, el sistema de ecuaciones producido por MEF y MEC, están expresados en términos diferentes, los cuales no se pueden relacionar entre sí, sin ser tratados previamente.

El método de acople iterativo propuesto del método de los elementos finitos y el método de los elementos de contorno, ofrece como principal ventaja que el ensamble y análisis de un sistema de ecuaciones general es evitado, para de esta forma tomar ventaja de las características de las respectivas matrices, permitiendo la utilización de dos códigos especializados para analizar cada uno de los subdominios.

La idea de acoplar FEM y BEM tiene su origen en el trabajo de McDonald y Wexley en los años 70 [17], y la primera formulación organizada para análisis de sólidos fue presentada por Zienkiewicz et al. en 1977 [Zienkiewicz, 1977], y luego en su famoso artículo “Marriage à la mode-the best of two worlds” [Zienkiewicz, 1977]. Desde entonces algunos investigadores han continuado trabajando en diferentes métodos de acople utilizando el Método de los Elementos Finitos y el Método de los Elementos de Contorno, con el objetivo de utilizar las ventajas que cada uno de estos métodos ofrece. Han sido reportados algunos trabajos de métodos acoplados de forma directa, en los cuales se utiliza el dominio del tiempo para problemas de interacción suelo - estructura y propagación de ondas [Rizos, 2002]. Se pueden mencionar a Karabalis y Beskos [Karabalis, 1985] y Spyarakos y Beskos [Spyarakos, 1986] quienes en sus trabajos presentaron el análisis de fundaciones flexibles modeladas en 2 y 3 dimensiones utilizando un acople MEF - MEC. Luego en 1987, Fukui [Fukui, 1987] presentó un trabajo de aplicación más general de análisis 2D, desarrollado para problemas de propagación de ondas utilizando un acople MEC - MEC. Estorff y Kasel [Estorff, 2006] y Estorff [Estorff, 1990] presentaron trabajos de acoples MEF - MEC con aplicaciones de deformación plana en 2D. En el año 2000, Estorff y Firuziaan [Estorff, 2000] presentan un trabajo más general el cual analiza el dominio de elementos finitos con un comportamiento no lineal. Con el objetivo de evitar algunos de los problemas que se presentan en los acoples convencionales MEF - MEC, se comenzaron a realizar trabajos utilizando acoples iterativos. Entre otros trabajos están el de Feng y Owen [Feng, 1996] quienes muestran un método iterativo MEF - MEC de interacción placa- fundación y en el 2001, Elleithy, Al-Gathani y El-Gebeily [Elleithy, 2001] publicaron su trabajo donde aplican un método iterativo MEF - MEC a problemas en elastostática.

2. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

En el análisis con elementos finitos, se considera un dominio el cual es discretizado con elementos conectados entre si por nodos. Los desplazamientos en sistema de coordenadas locales en cada elemento son asumidos como una función de los desplazamientos en el punto nodal del elemento n . Por lo tanto para el elemento m se tiene

$$u^m(x, y, z) = N^m(x, y, z)\hat{U} \quad (1)$$

donde N^m es la matriz de interpolación de desplazamientos del elemento m , y \hat{U} el vector de las componentes de desplazamiento en todos los nodos.

Las deformaciones asociadas al campo de los desplazamientos son:

$$\varepsilon^m(x, y, z) = B(x, y, z) \hat{U} \quad (2)$$

donde B es la matriz deformación – desplazamiento.

Los esfuerzos en el elemento finito están relacionados a las deformaciones del elemento y a los esfuerzos elementales iniciales

$$\sigma^m = E^m \varepsilon^m + \sigma_i^m \quad (3)$$

donde E es la matriz de elasticidad del elemento m y σ_i^m son los esfuerzos iniciales.

2.1 Principio de los Desplazamientos Virtuales

La base de la solución de elementos finitos basada en los desplazamientos es el Principio de los Desplazamientos Virtuales, el cual establece que el equilibrio de un cuerpo requiere que, para desplazamientos virtuales pequeños aplicados a un cuerpo en estado de equilibrio, el trabajo total virtual interno es igual al trabajo total virtual externo [Bathe, 1999]:

$$\int_v \bar{\varepsilon}^T \sigma dV = \int_v \bar{U}^T f^B dV + \int_{Sf} \bar{U}^{SfT} f^{Sf} dS + \sum_i \bar{U}^{iT} R_c^i \quad (4)$$

donde \bar{U} son los desplazamientos virtuales, $\bar{\varepsilon}$ son las correspondientes deformaciones virtuales y f^B , f^{Sf} , R_c^i son las cargas aplicadas.

La ecuación de equilibrio dinámico lineal en el dominio del tiempo o ecuación de movimiento para un sistema de elementos finitos viene dada por (despreciando las fuerzas viscosas) [Bathe, 1999]:

$$M\ddot{u}(t) + Ku(t) = f(t) \quad (5)$$

siendo f es el vector de fuerzas nodales equivalentes y \ddot{u} y u las aceleraciones y desplazamientos respectivamente.

K la matriz de rigidez:

$$K = \int_v B^{mT} C^m B^m dV \quad (6)$$

y M la matriz de masa:

$$M = \int_v \rho^m N^{mT} N^m dV \quad (7)$$

donde ρ^m es la densidad de masa del elemento m .

2.2 Integración en el tiempo

La ecuación de movimiento representa un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, que en este trabajo será resuelto utilizando el Método de Newmark [Bathe, 1999], que es un método de integración directa implícita paso a paso, considerado una extensión del método de aceleración lineal.

La integración numérica directa se basa en dos ideas. Primero, en vez de tratar satisfacer la ecuación de movimiento en un tiempo t , se satisface en n intervalos de tiempo Δt . Y segundo, se asumen variaciones Δt de los desplazamientos, las velocidades y aceleraciones.

Como método de integración en el tiempo se utiliza el método de Newmark, el cual se resume a continuación:

$${}^{t+\Delta t}\dot{u} = {}^t\dot{u} + \left[(1 + \delta) {}^t\ddot{u} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{u} \right] \Delta t \quad (8)$$

$${}^{t+\Delta t}u = {}^tu + {}^t\dot{u}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t\ddot{u} + \alpha {}^{t+\Delta t}\ddot{u} \right] \Delta t^2 \quad (9)$$

donde ${}^{t+\Delta t}u$, ${}^{t+\Delta t}\dot{u}$, ${}^{t+\Delta t}\ddot{u}$ son aproximaciones de u , \dot{u} , \ddot{u} en un tiempo $t + \Delta t$ y α y δ son parámetros que pueden ser determinados para precisión y estabilidad en la integración, con valores, utilizados para este trabajo, de 0.25 y 0.50 [Bathe, 1999], respectivamente. Los valores de los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones en el paso de tiempo t deben ser conocidos.

3. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

A continuación, se proporciona un breve resumen del MEC. El lector interesado en los detalles de la formulación puede consultar las referencias [Beer, 1983] [Beer, 2001] 3, 4, [Gaul, 2003].

La ecuación de equilibrio dinámico en notación indicial, está dada por:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = c\dot{u}_i + \rho\ddot{u}_i \quad (10)$$

Despreciando las fuerzas de cuerpo f_i y el amortiguamiento $c\dot{u}_i$, se tiene la ecuación de equilibrio dinámico simplificado para el problema elastodinámico, siendo \hat{t} el tiempo:

$$\sigma_{ik,k}(\hat{t}) - \rho\ddot{u}_i(\hat{t}) = 0 \quad (11)$$

En el método directo de los elementos de contorno, la ecuación integral de contorno está dada por:

$$\begin{aligned} c_{ij}(P)u_i(P, \hat{t}) &= \int_{\Gamma} t_i(Q, \hat{t})U_{ij}^*(P, Q, \hat{t})d\Gamma - \int_{\Gamma} u_i(Q, \hat{t})T_{ij}^*(P, Q, \hat{t})d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \int_0^{\hat{t}} t_i(Q, \tau)U_{ij}^*(P, Q, \hat{t} - \tau)d\Gamma d\tau - \int_{\Gamma} \int_0^{\hat{t}} u_i(Q, \tau)T_{ij}^*(P, Q, \hat{t} - \tau)d\Gamma d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

Esta ecuación muestra la relación de reciprocidad entre las tracciones $t(Q)$ y los desplazamientos $u(Q)$ en el punto Q que pertenece al contorno Γ y una solución fundamental definida por un tensor de carga unitaria concentrada aplicada en el punto P que pertenece al contorno Γ , cuyo estado es reflejado por las tracciones T^* y los desplazamientos U^* . $c_{ij}(P)$ es la matriz relacionada a las propiedades geométricas locales de la superficie alrededor del punto fuente P .

Las variables u y t sobre el contorno Γ son representadas usando técnicas de interpolación desarrolladas anteriormente en el método de los elementos de finitos. El contorno es discretizado por E elementos donde $N_e^f(\eta)$ son las funciones de forma con F nodos, y las aproximaciones de los valores de los desplazamientos y tracciones dependientes del tiempo vienen dados por

$$\tilde{u}(Q, \hat{t}) = \sum_{f=1}^F N^f(\eta)u^f(\hat{t}) \quad (13)$$

$$\tilde{t}(Q, \hat{t}) = \sum_{f=1}^F N^f(\eta)t^f(\hat{t}) \quad (14)$$

El sistema de ecuaciones obtenido se muestra en la (15), donde H y G son los coeficientes de las matrices de influencia y los vectores u y t son los desplazamientos y las tracciones respectivamente [Gaul, 2003].

$$Hu = Gt \quad (15)$$

Debido a que usualmente se tienen problemas que presentan condiciones de contorno mixtas, este sistema de ecuaciones debe ser organizado, ubicando los coeficientes multiplicados por valores desconocidos en el lado izquierdo y los coeficientes multiplicados por valores conocidos en el lado derecho, para obtener el sistema

$$Ax = y \quad (16)$$

siendo A la matriz de coeficientes, x el vector de incógnitas y y el vector de valores conocidos.

3.1 Elementos de contorno en dominio del tiempo

En el método de los elementos de contorno, el procedimiento con pasos en el tiempo o time step, aproxima el comportamiento espacial con funciones de forma polinomiales [Lehmann, 2007]. Este procedimiento inicialmente fue propuesto por Mansur [Mansur, 1983] y luego Antes [Antes, 1985] introdujo las condiciones iniciales diferentes a cero. El tiempo t es aproximado por polinomios, que generalmente son lineales para los desplazamientos y constantes para las tracciones, al discretizar el dominio del tiempo en N pasos de tiempo iguales Δt [Lehmann, 2007], y al introducirlas en la ecuación de integral, en notación indicial, se obtiene:

$$c_{ij}(P)\tilde{u}(P,\tau) = \sum_{e=1}^E \sum_{f=1}^F \sum_{m=1}^N \left[\int_{\Gamma_e} N_e^f(\eta) \int_{t_{m-1}}^{t_m} U_{ij}(P,Q,t-\tau) d\tau d\Gamma_e - \int_{\Gamma_e} N_e^f(\eta) \int_{t_{m-1}}^{t_m} T_{ij}(P,Q,t-\tau) \left(U_{ij}^{em-1} \frac{tm-1}{\Delta t} + U_{ij}^{em} \frac{\tau-tm-1}{\Delta t} \right) d\tau d\Gamma_e \right] \quad (17)$$

donde U_{ij}^{em} son valores nodales definidos en el tiempo y en el punto de colocación.

4. ACOUPLE MEF – MEC

Existen básicamente dos formas de acoplar el Método de los Elementos Finitos y el Método de los Elementos de Contorno [Beer, 2001]:

- 1) La región donde se utilizan elementos de contorno es tratada como un elemento finito muy grande y su rigidez es calculada y ensamblada en una matriz de rigidez global.
- 2) La región con elementos finitos es tratada como una región equivalente a una región de elementos de contorno y el tratamiento de su matriz de rigidez es equivalente al utilizado en el caso de dominios múltiples en Método de los Elementos de Contorno.

Al acoplar el Método de los Elementos Finitos y el Método de los Elementos de Contorno, se presentan muchas dificultades relacionadas con la teoría de cada uno de los métodos y con su implementación (ver refs. [Beer, 1983] [Zienkiewicz, 1977]). En primer lugar, la combinación de ambos métodos requiere el cumplimiento de las condiciones de compatibilidad y de equilibrio a lo largo de la interfase entre los subdominios de MEF y MEC. Debido a la diferencia existente entre las formas de las fuerzas desconocidas utilizadas (fuerzas nodales en MEF y tracciones en MEC) (Figura 1) y las situaciones en la interfase, los procedimientos para imponer las condiciones en la interfase a las ecuaciones finales acopladas pueden ser complicados. La segunda dificultad está relacionada a la eficiencia del cálculo computacional. Como los métodos de elementos finitos y elementos de contorno presentan matrices simétricas y asimétricas respectivamente, la unión de las mismas resultará en un sistema de ecuaciones asimétrico, el cual es obviamente más costoso de resolver en términos de tiempo computacional y espacio en memoria en comparación al caso simétrico. Además, debe ser tomado en cuenta el hecho de que ambos programas son diferentes en términos de la estructura de datos, organización de cada programa y las técnicas numéricas implementadas. Los inconvenientes relacionados

al acople MEF - MEC, mencionados anteriormente, se derivan en parte de las estrategias utilizadas en los procedimientos de acople donde las ecuaciones de elementos finitos y de elementos de contorno son ensambladas de forma explícita. Para evitar estos inconvenientes, que se derivan en parte de las estrategias utilizadas en los procedimientos de acople donde las ecuaciones de elementos finitos y de elementos de contorno son ensambladas de forma explícita, se comenzaron a desarrollar los métodos de descomposición del dominio, en los cuales no es necesario combinar los coeficientes de las matrices de rigidez de los subdominios de elementos finitos y de elementos de contorno, a diferencia de la mayoría de los métodos convencionales.

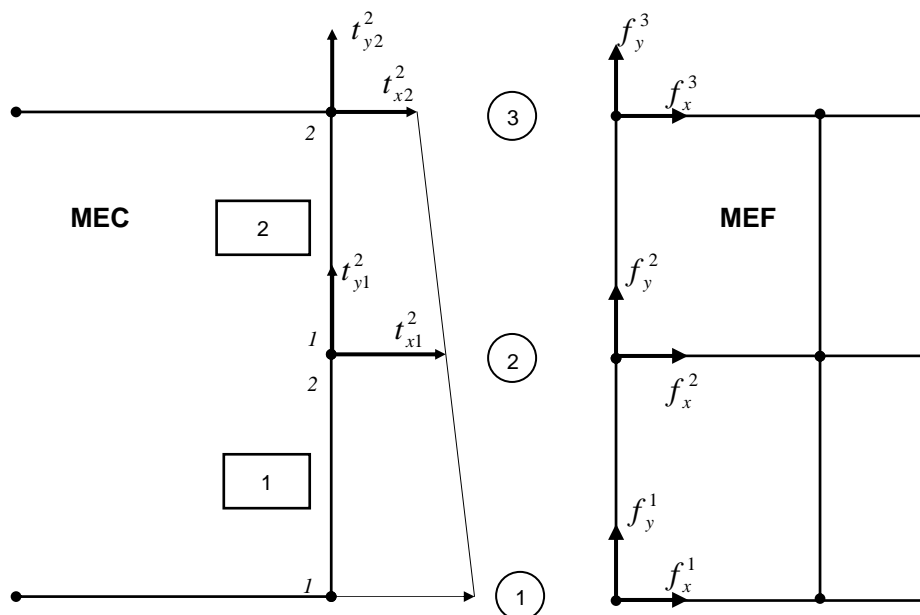


Figura 1. Tracciones y fuerzas nodales en la interfase.

La idea básica del método acople iterativo está basada en las conclusiones que Cruse y Osias [Cruse, 1991] sacaron de su experiencia con procedimientos de acople, en donde resalta la importancia de preservar la naturaleza del método de los elementos de contorno, en vez de forzarlo a adoptar un formato de elementos finitos.

De esta manera, la formulación de elementos finitos y elementos de contorno puede ser utilizada como programa base para hacer el acople de ambos códigos, en el cual se realizan los cálculos de cada subdominio por separado y sucesivamente se renuevan las variables de la interfase de cada uno de los subdominios hasta alcanzar la convergencia.

4.1 Acople Iterativo MEF – MEC

Considérese un dominio Ω bidimensional, el cual es descompuesto en dos subdominios Ω_F y Ω_C (Figura 2). Cada subdominio puede ser discretizado usando el método de los elementos finitos o el método de los elementos de contorno. Al discretizar se requiere que exista coincidencia de nodos a lo largo de la interfase entre ambos subdominios.

Para que el acople se pueda llevar a cabo, es necesario imponer condiciones de compatibilidad de los desplazamientos y equilibrio de las fuerzas en los nodos de la interfase (Figura 3), como se muestra en (18) y en (19).

$$u_f^i = u_c^i \quad (18)$$

$$f_f^i + f_c^i = 0 \quad (19)$$

donde u_f^i , u_c^i y f_f^i , f_c^i son los desplazamientos y las fuerzas en la interfase en el dominio de elementos finitos y en el dominio de elementos de contorno respectivamente.

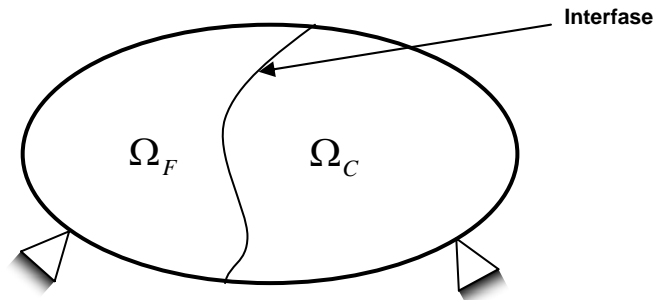


Figura 2. Dominio del problema dividido en dos subdominios.

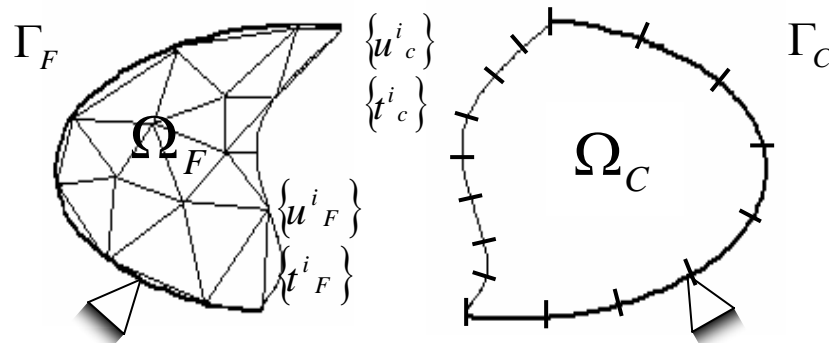


Figura 3. Mallas de subdominios MEF y MEC. Interfase entre los subdominios.

Para obtener consistencia entre la formulación del método de elementos finitos y el método de elementos de contorno, es necesario transformar las tracciones en el contorno en fuerzas nodales equivalente (20), para lo cual se utiliza una matriz de transformación T .

$$f = T \cdot t \quad (20)$$

Esta matriz T , es creada a partir de la aplicación de desplazamientos virtuales [Beer, 2001]. Para calcular el componente x de la fuerza nodal equivalente en el nodo n , se aplica un desplazamiento virtual unitario en la dirección x , en el nodo n (Figura 4). Para que se pueda satisfacer el equilibrio, el trabajo realizado por las tracciones debe ser igual al trabajo realizado por las fuerzas nodales en el nodo n .

El trabajo total realizado es

$$f_x^n \cdot 1 = \int_{\Gamma} t_x \delta u_x d\Gamma \quad (21)$$

Sustituyendo la interpolación de tracciones y desplazamientos en la ec. (22) y (23):

$$t_x = \sum_{i=1}^2 N_i t_{xi}^e \quad (22)$$

$$\delta u_x(\xi) = N_e(\xi) \cdot 1 \quad (23)$$

en la ec. (21) se obtiene:

$$f_x^n \cdot 1 = \int_{\Gamma_1} (N_1 t_{x1}^1 + N_2 t_{x2}^1) N_2 d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} (N_1 t_{x1}^2 + N_2 t_{x2}^2) N_1 d\Gamma_2 \quad (24)$$

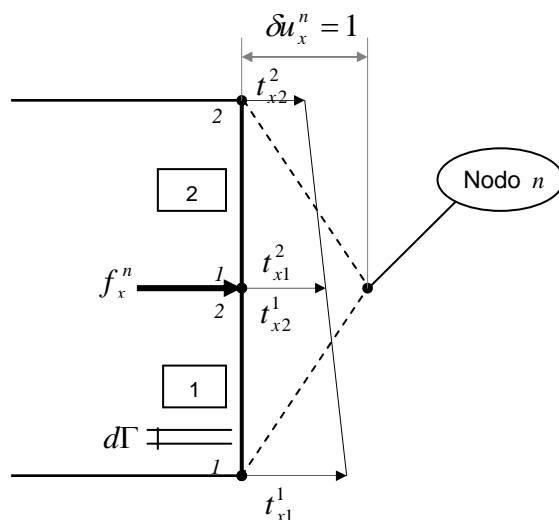


Figura 4. Cálculo de la fuerza equivalente nodal f_x^n

La matriz T en dos dimensiones es un ensamble de todas las matrices de transformación de los elementos en la interfase, que tienen funciones de forma lineales y poseen una longitud L y está dada por:

$$T_{jn}^e = \int_{\Gamma_e} N_j N_n d\Gamma_e \quad (25)$$

$$T^e = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad (26)$$

4.2 Procedimiento de acople iterativo utilizado

El presente algoritmo es basado en un método Neumann-Dirichlet secuencial con relajación doble desarrollado por von Estorff y Hagen [Estorff, 2006] para problemas tridimensionales.

Como se mencionó anteriormente, cada subdominio es analizado independientemente y sólo la información en la interfase es comunicada entre ellos. El dominio es discretizado en el tiempo en $t = N\Delta t$, donde $N = 1, 2, 3, \dots$

En la Figura. 5, se muestra gráficamente el algoritmo que se resuelve para cada paso t del tiempo. Se aplican unas fuerzas nodales iniciales en la interfase del subdominio discretizado con elementos finitos, para luego ser resuelto y obtener de esta forma los desplazamientos en la interfase ${}^t_k u_{f,i}$. Al conocer los desplazamientos en la interfase del subdominio discretizado con elementos finitos, se les aplica la relajación mediante la utilización del parámetro ω_u :

$${}^t_k u_{c,i} = \omega_u \cdot {}^t_k u_{f,i} + (1 - \omega_u) {}^t_{k-1} u_{c,i} \quad (27)$$

siendo ${}^t_k u_{c,i}$ los desplazamientos que se aplicaran en la interfase del subdominio discretizado con elementos de contorno en esta iteración k del paso del tiempo t y ${}^t_{k-1} u_{c,i}$, los desplazamientos en la interfase en el subdominio discretizado con elementos de contorno, en iteración $k-1$ del paso del tiempo t . Una vez aplicados los desplazamientos ${}^t_k u_{c,i}$ en la interfase del subdominio discretizado con elementos de contorno, se realiza el análisis con dicho método. Las tracciones obtenidas en la interfase, resultado del análisis realizado con método de elementos de contorno, son transformadas en fuerzas nodales equivalentes, mediante la utilización de la matriz de transformación de la ec. (20).

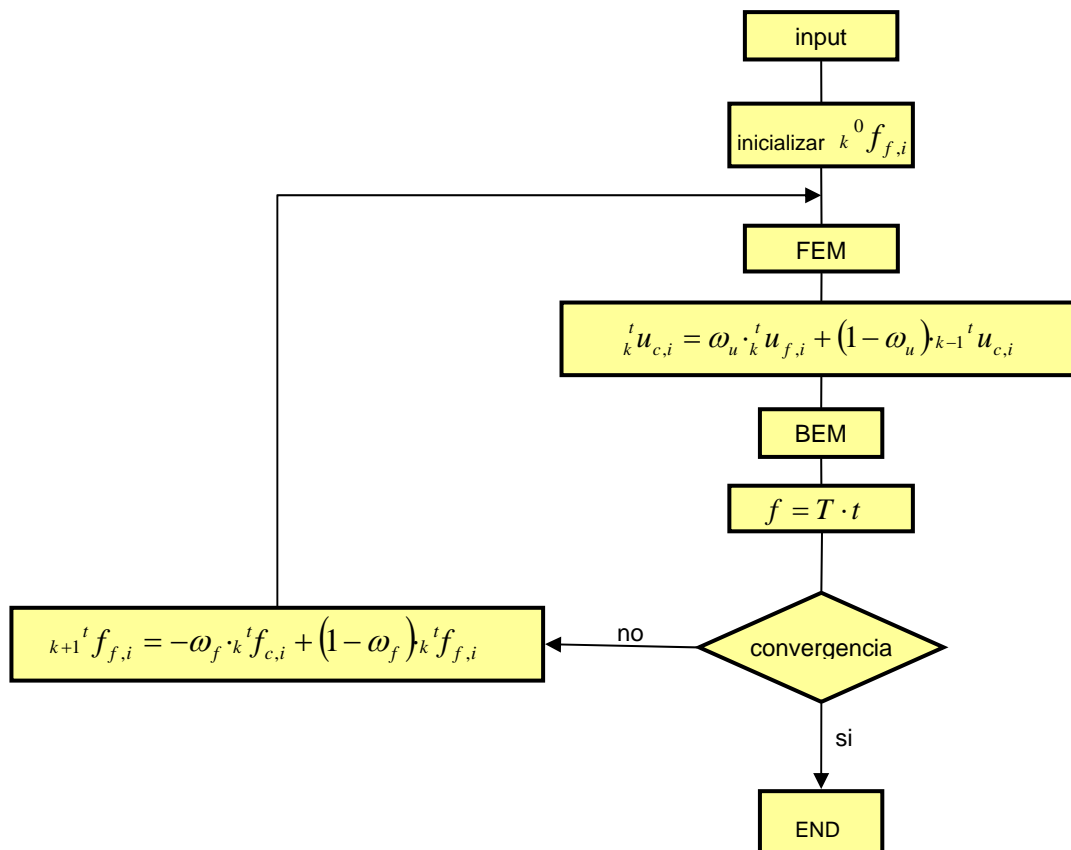


Figura 5. Algoritmo de acople iterativo MEF – MEC.

Luego de obtener las fuerzas nodales equivalentes, se chequea la convergencia del procedimiento. Si se alcanza la convergencia se termina el proceso iterativo. En caso contrario, las nuevas fuerzas nodales equivalentes son actualizadas aplicando el parámetro de relajación ω_f , usando la ec. (28), y de esta forma serán aplicadas, en la próxima iteración, como condición de contorno sobre la interfase del subdominio discretizado con elementos finitos de contorno.

$${}^t_{k+1}f_{f,i} = -\omega_f \cdot {}^t_k f_{c,i} + (1 - \omega_f) {}^t_k f_{f,i} \quad (28)$$

Para chequear la convergencia se utilizó un criterio de convergencia de incrementos de desplazamientos y otro basado en el balance de fuerzas, que mostrados a continuación:

$$\frac{\| {}^t_k \mathbf{u}_{f,i} - {}^t_{k-1} \mathbf{u}_{c,i} \|_2}{\| {}^t_k \mathbf{u}_{c,i} \|_2} < \varepsilon_u \quad (29)$$

$$\frac{\| {}^t_k \mathbf{f}_{c,i} - {}^t_{k-1} \mathbf{f}_{f,i} \|_2}{\| {}^t_k \mathbf{f}_{f,i} \|_2} < \varepsilon_f \quad (30)$$

donde la ec. (29) mide la convergencia en desplazamientos, mientras que la ec. (30), refleja la convergencia de las tensiones.

5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Una de las aplicaciones de los diferentes acoples de elementos finitos y elementos de contorno son los problemas de interacción estructura – suelo. En este tipo de problemas se discretiza el campo cercano (*near field*) utilizando elementos finitos y el dominio semi-infinito (*far field*) es discretizado con elementos de contorno.

Para ilustrar la aplicabilidad de este acople iterativo MEF-MEC, se presenta un espacio semi-infinito elástico en 2D, sometido a una carga distribuida. Este modelo es utilizado con el objetivo de comparar los resultados obtenidos en este trabajo con resultados obtenidos por otros autores, siendo originalmente usado por Cruse [Cruse, 1991] y luego por von Estorff y Firuziaan [Estorff, 2000], utilizando un acople por el método directo.

La geometría analizada se muestra en la Figura 6.

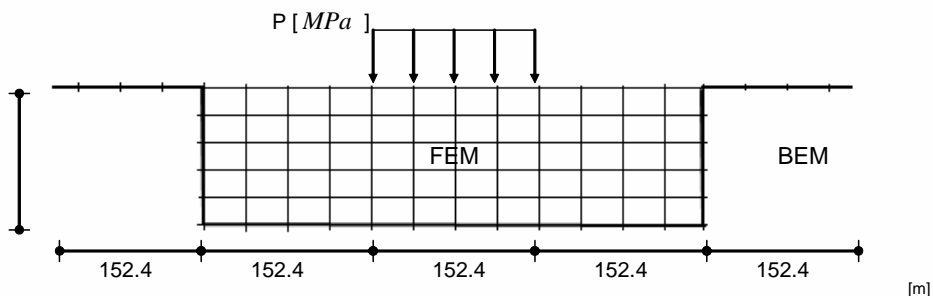


Figura 6. Discretización del modelo de espacio semi-infinito 2D.

La carga aplicada es una función con paso en el tiempo $P(t) = 68.96H(t-0)[MPa]$, siendo H es la función de paso en el tiempo. Para ambos subdominios se utilizó un material con un módulo de elasticidad de Young $E = 1.77 \times 10^4 MPa$, densidad de masa $\rho = 3.15 \times 10^4 Ns^2/m^4$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$.

Los valores de los parámetros de relajación utilizados ω_u y ω_f son 1.0 y 0.75, respectivamente [Estorff y Hagen, 2006], y una tolerancia de convergencia $\varepsilon_u = \varepsilon_f = 1.0 \times 10^{-4}$.

El subdominio discretizado con elementos finitos, mostrado en la Figura 6 y 7(a), con dimensiones de 190.5 metros de altura por 457.2 metros de ancho y consta de elementos cuadriláteros bilineales. El dominio discretizado con elementos de contorno, mostrado en la Figura 6 y 7(b), consta de elementos de contorno lineales de 2 nodos de igual tamaño.

En la Figura 9, se muestran los desplazamientos obtenidos en el Nodo A (Figura 8) durante el lapso de 1 segundo, utilizando un paso en el tiempo $\Delta t = 0.01$ para ambos subdominios.

Los desplazamientos resultados del Nodo A, fueron comparados con resultados de acoples directos MEF - MEC realizados por Cruse [Cruse, 1968], Mansur [Mansur, 1983] y von Estorff y Firuziaan [Estorff y Firuziaan, 2000] y el método de los elementos finitos y el método de los elementos de contorno sin acoplar [Estorff y Firuziaan, 2000] (Figura 9).

Como se puede observar en esta figura, los resultados obtenidos en este trabajo muestran una buena coincidencia con resultados obtenidos anteriormente por otros autores.

Las mayores diferencias se observan en los instantes $t=0.2$, $t=0.3$, $t=0.4$ y $t=0.9$. Sin embargo, la mayor diferencia no superó el 10%, lo cual indica que el método propuesto es razonablemente preciso.

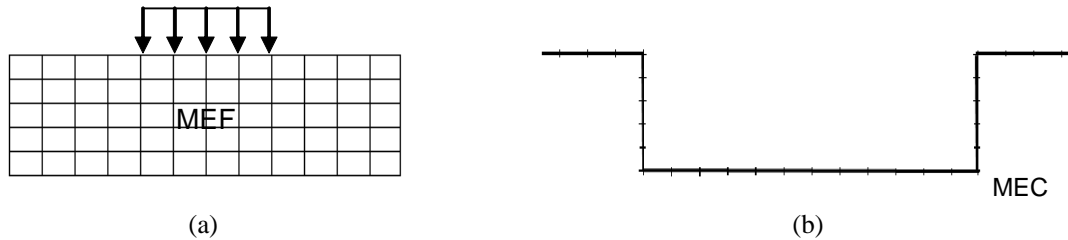


Figura 7. Discretización del dominio, (a) subdominio MEF, (b) subdominio MEC.

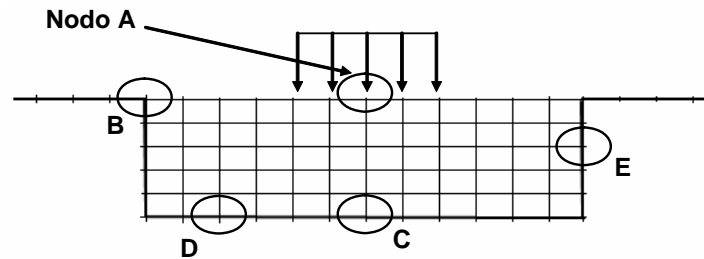


Figura 8. Nodos A, B, C, D y E del dominio

En la Figura 10, se muestran resultados de los Nodos B, C, D y E, de la Figura 8, observándose que también hay buena coincidencia en los desplazamientos obtenidos por MEF y por MEC en los nodos de la interface de ambos subdominios.

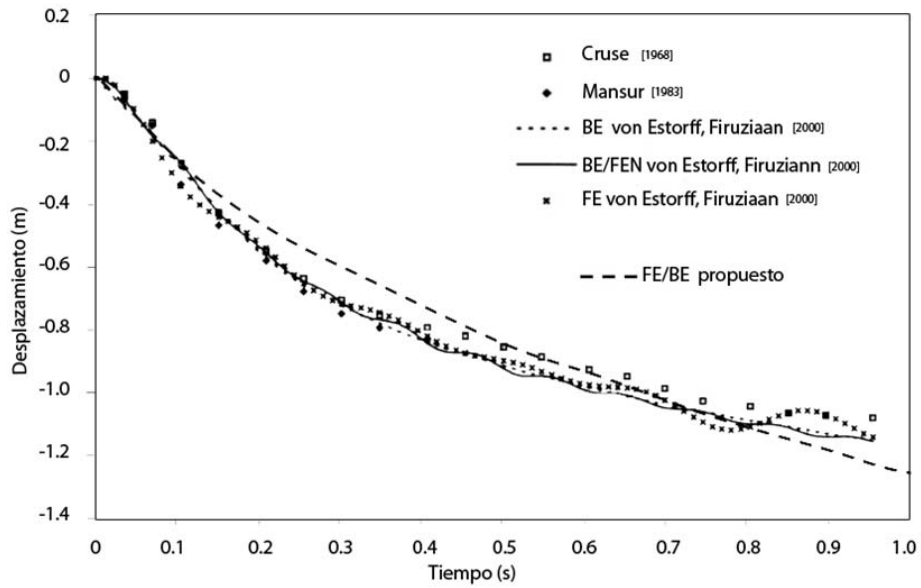


Figura 9. Comparación de resultados del modelo analizado en el Nodo A con resultados obtenidos por otros autores.

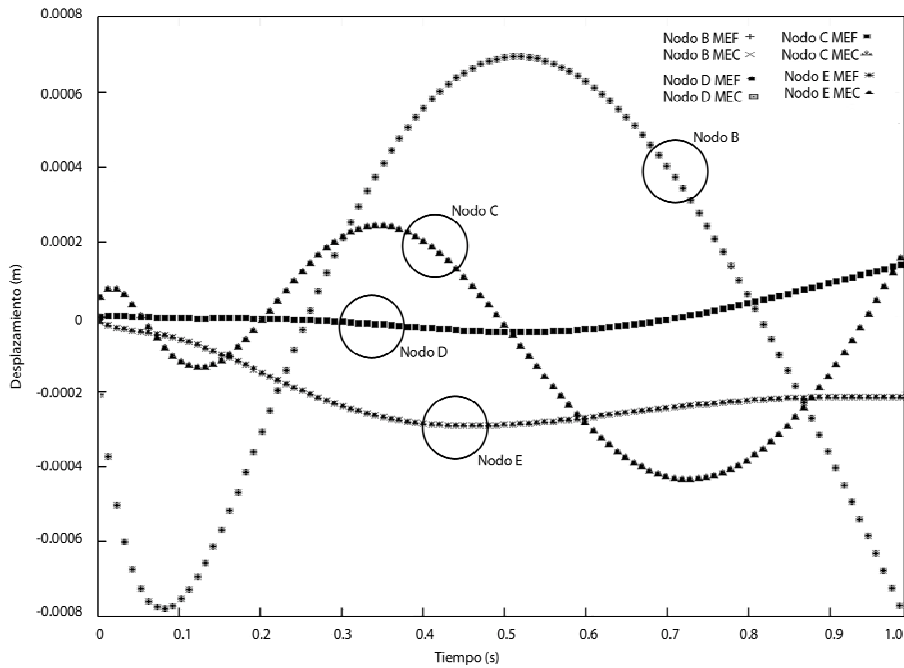


Figura 10. Desplazamientos MEF y MEC del modelo analizado en los Nodos B, C, D y E ubicados en la interfase de los subdominios.

6. CONCLUSIONES

Se presenta un acople iterativo de elementos finitos y elementos de contorno para resolver el problema elastodinámico en mecánica de sólidos en dos dimensiones, utilizando un modelo secuencial Neumann – Dirichlet con relajación doble. La formulación de acople iterativo de elementos finitos y elementos de contorno permite mantener la independencia de los métodos, debido a los sistemas de ecuaciones en cada método se realizan por separado, y solamente la información en la interfase de los dos subdominios es comunicada entre ellos y de esta forma se evitan las desventajas de los acoples directos en los que se resuelve solamente un sistema de ecuaciones globales para todo el dominio.

En orden de mostrar la aplicabilidad de el método de acople iterativo MEF – MEC desarrollado en este trabajo, se analiza un espacio semi-infinito elástico en el cual, el campo cercano se discretiza con elementos finitos y el campo lejano o dominio semi-infinito se discretiza con elementos de contorno. Los resultados obtenidos en este trabajo mostraron buena coincidencia con resultados obtenidos por otros autores.

7. AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan su agradecimiento al Fondo Nacional de Ciencia y Tecnología (Caracas, Venezuela) y ALFA ELBENet Project (Comunidad Europea – América Latina) por su soporte económico.

8. REFERENCIAS

1. Antes, H. A boundary element procedure for transient wave propagation in two dimensional isotropic elastic media. *Finite Element in Analysis and Design*. **1**: 313-322. 1985.
2. Bathe, K. *Finite Element Procedure*. Prentice Hall. New Jersey. 1999.
3. Beer, G. Finite element, boundary element and coupled analysis of bounded problems in elastostatics. *Int. J. Numer. Meth. in Eng.* **19**: 567-580. 1983.
4. Beer, G. *Programming the Boundary Element Method. An Introduction for Engineers*. John Wiley & Sons. England, 2001.
5. Cruse, T.A. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. *Int. J. Math. Anal. Appl.* **22**: 341-55. 1968.
6. Cruse, T.A. Osias, J.R. Issues in merging the finite element and boundary integral equation methods. *J.of Math. Comput. Modelling*. **15**: 103-118. 1991.
7. Elleithy, W. Al-Gathani, H. El-Gebeily, M. Iterative Coupling of BE and FE Methods in Elastostatics. *Eng. Anal. Bound. Elements*. **25**: 685-695. 2001.
8. Estorff, O.v. *Earthquake resistant construction and design*. Chapter in: Soil-Structure interaction analysis by a combination of boundary and finite elements. Rotterdam. 1990.
9. Estorff, O.v. Firuziaan, M. Coupled BEM / FEM approach for nonlinear soil / structure interaction. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. **24**: 715-725. 2000.
10. Estorff, O.v. Hagen, C. Iterative coupling of FEM and BEM in 3D transient elastodynamics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. **30**: 611-622. 2006.

11. Estorff, O.v. Kasel, K. Coupling of boundary and finite elements for soil-structure interaction problems. *J. of Earthquake Eng. Struct. Dynam.* **18**: 1065-1075.1989.
12. Feng, Y.T. Owen, D.R.J. Iterative Solution of Coupled FE/BE Discretization for Plate-Foundation Interaction problems. *Int. J. Numer. Meth. in Eng.* **39**: 1889-1901.1996.
13. Fukui, T. Time marching BE-FE method in 2D elastodynamic problem. *International Conference BEM IX*. Stuttgart, 1987.
14. Gaul, L. Kögl, M. and Wagner, M. *Boundary Element Methods for Engineers and Scientist. An Introductory Course with Advanced Topics*. Springer. Berlin. 2003.
15. Karabalis, D.L. y Beskos, D.E. Dynamic response of 3-D flexible foundations by time domain BEM and FEM. *J. of Soil Dynam. Earthquake Eng.* **4**: 91-101. 1985.
16. Lehmann, L. *Wave Propagation in Infinite Domains. With Applications to Structure Interaction*. Springer. Berlin, 2007.
17. Mansur, W.J. *A Time Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method*. PhD. Dissertation, University of Southampton. 1983.
18. Rizos, D.C. Wang, Z. Coupled BEM-FEM solutions for direct time domain soil-structure interaction analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. **26**: 877-888. 2002.
19. Spyrakos, C.C. y Beskos, D.E. Dynamic response of rigid strip foundation by time domain BEM. *Int. J. Num. Meth. in Eng.* **23**: 1547-1565. 1986.
20. Zienkiewicz O.C., Kelly D.M. and Bettles P. The coupling of the finite element method and boundary solution procedure. *Int. J. of Numer. Meth. In Eng.* **11**: 355-375.1977.
21. Zienkiewicz, O.C. Kelly, D.M. Bettles, P. Marriage à la mode – the best of two worlds. *Int. Symposium on Innovative Numerical Analysis in Applied Engineering Science*. France, 1977.