

Uso de gráficas en una situación de modelación del movimiento en matemática en la enseñanza secundaria en Chile

Verónica Díaz Quezada

mvdiaz@ulagos.cl

Universidad de Los Lagos. Chile

Iván Pérez Vera

ivanestebanperez@gmail.com

Facultad de Educación, Universidad de Las Américas; Chile

Recibido: 11 de marzo de 2016 **Aceptado:** 19 de mayo de 2016

Resumen

Este artículo forma parte de una investigación en el marco del programa de Magister en Educación Matemática y da cuenta de las características de los usos estudiantiles de figuraciones previas a la gráfica cartesiana ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia. En particular se aborda el estudio de los procesos del uso de gráficas, colocando en escena una situación problema de modelación del movimiento que permite estudiar un fenómeno de cambio a través de los registros gráficos. Se explicitan los resultados obtenidos en términos de los niveles de análisis que van desde las visiones locales y globales de la gráfica, siguiendo con la noción de práctica socio escolar de figuración, recurriendo a nociones teóricas provenientes de la teoría de la imagen y de los análisis semánticos que permitieron su caracterización.

Palabras clave: Uso de figuraciones, Resolución de Problema, Gráficas Cartesianas, Modelación del Movimiento.

Using of graphs in a situation of movement in mathematical modeling in secondary education in Chile

Abstract

This article is part of an investigation under the program of Master of Mathematics Education and realizes the characteristics of student uses pre-cartesian graph a phenomenon of variation of time and distance configurations. In particular the study of processes using graphical addresses, putting on stage a problem situation modeling the movement that allows to study a phenomenon of change through graphic records. The results obtained in terms of the levels of analysis ranging from local and global views of the graph, along with the notion of figuration partner school practice, drawing on theoretical notions from the theory of image and explicit analysis which enabled semantic characterization.

Keywords: Use of Figurations, Problem Solving, Cartesian Graph, Modeling the Movement.

Introducción

Al finalizar la enseñanza primaria y según la reforma vigente en Chile, en la unidad de Álgebra los alumnos comienzan el reconocimiento de funciones y su distinción con las relaciones en contextos diversos. Esta unidad ofrece también la posibilidad de retomar tópicos

relativos a proporcionalidad directa e inversa, pero con mayor énfasis en el concepto de variación proporcional y tratado desde el punto de vista algebraico (Mineduc, 2015). Las gráficas cartesianas asociadas a las funciones, sólo vienen a formar parte de los contenidos curriculares en la educación secundaria.

Uno de los aspectos tácitamente aceptados en la propuesta curricular actual de todo nivel educativo en Chile, es la influencia del efecto en la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. Resolver problemas es considerado tanto un medio como un fin para lograr una buena educación matemática (Mineduc, 2013). El desafío actual, es lograr que los alumnos desarrollen competencias matemáticas consideradas en los currículum como esenciales y que los alumnos debieran desarrollar a lo largo de la enseñanza. Estas integran aptitudes, conocimientos y capacidades, que implican una actitud favorable al intentar entender la estructura de un problema y la capacidad para desarrollar los procesos de resolución (Díaz y Poblete, 2015).

Para García (2014, en Díaz y Poblete, 2014), la resolución de problemas corresponde a una competencia que no se adquiere o desarrolla en abstracto, sino a partir de situaciones concretas, en espacios concretos, por personas concretas y a través de actividades concretas que forman parte del quehacer del educando, por lo que tienen un carácter pragmático y reflexivo y están indisolublemente asociadas a la adquisición de una serie de saberes por parte del sujeto (Coll, 2007).

Se explicita en el TIMSS 2003, la exigencia de resolver problemas enmarcados en contextos matemáticos o de la vida real de los que es muy poco probable que los alumnos hayan encontrado ítems similares (Díaz y Poblete, 2013). Por otra parte, los resultados en PISA (OCDE, 2004, 2007, 2009 y 2010) han puesto de relieve la importancia de la resolución de problemas matemáticos en la educación obligatoria.

Sin embargo a pesar de la importancia concedida al desarrollo de esta habilidad, autores como Castro (2008) y Santos (2007) reconocen que los intentos de enseñar a los estudiantes estrategias de resolución de problemas generales no han tenido éxito y es importante destacar además, la falta de atención en los libros de texto por el aprendizaje heurístico de estrategias para resolver problemas (Schoenfeld, 2008; Pino y Blanco, 2008).

En lo que respecta a la gráfica cartesiana escolar, como objeto matemático es la principal herramienta matemática para la figuración del cambio. Sin embargo el marco de referencia que el sistema escolar ha privilegiado para las gráficas en general, no permite que estas puedan ser consideradas como un medio de argumentación en sí mismas y solo son la representación de la función; las tareas que los estudiantes hacen, se restringen a hallar la función sin desarrollar un lenguaje gráfico.

La manera de dar cuenta del uso e interpretación de las gráficas que hacen los estudiantes, supone naturalmente, la adopción de una postura epistemológica que permita la interpretación que se hace del trabajo del alumno. En la actualidad, la socio epistemología contempla el binomio modelación-graficación (Suarez y Cordero, 2008; Suarez y Cordero, 2010; Morales y Cordero, 2014) y representa un eje para desarrollar acciones en el sistema didáctico a través del diseño de situaciones de modelación del movimiento, ofreciendo una posibilidad de acceder a una situación de aprendizaje, que permite estudiar un fenómeno de cambio a través de las gráficas. En este marco formulamos la siguiente pregunta que orienta la investigación: ¿cuál es el rol que cumplen las figuraciones realizadas por estudiantes, previas a la gráfica cartesiana ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia?.

Para abordar la interrogante que orienta esta investigación, se formuló como objetivo caracterizar los usos estudiantiles de figuraciones previas a la gráfica cartesiana ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia.

Antecedentes Teóricos

El marco teórico que sustenta la investigación es la aproximación socio epistemológica (Cantoral y Farfán,1998) que sostiene que la construcción de conocimientos debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de la matemática, es decir, con el lenguaje de herramientas que resulta de la actividad humana. En lo que atañe a las gráficas, la dimensión epistemológica es la que tiene que ver directamente con el contenido matemático de enseñanza, el cual debe estudiarse desde las perspectivas de su origen y su funcionamiento, es decir, cuáles son las formas que se utilizan en la enseñanza escolar para poder graficar, y cuáles son las concepciones que tienen los estudiantes al estudiar los aspectos globales y locales de las gráficas en general y de funciones matemáticas en particular.

El origen del concepto de función ha estado siempre unido al estudio de los fenómenos sujetos a cambios. Las referencias más antiguas al concepto de función se encuentran en algunos escritos de astrónomos babilonios. En la Edad Media el estudio de funciones aparece ligado al concepto de movimiento, siendo uno de los primeros en realizarlo Nicolás de Oresme (1323-1392) el cual representó en unos ejes coordenados gráficos relacionados con el cambio de la velocidad respecto al tiempo. Tres siglos más tarde, Galileo, en 1630, estudió el movimiento desde un punto de vista cuantitativo, justificándolo experimentalmente y estableciendo a partir de ello, leyes y relaciones entre magnitudes.

En los programas vigentes de matemáticas en Chile, se introduce la noción de función como un cambio lineal, y sus representaciones toman mayor fuerza en la habilidad de modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas, considerando problemas abiertos y que pueden ser resueltos por medio de la función y de sus representaciones. Las Bases Curriculares desde la enseñanza primaria, dan relevancia al modelamiento matemático. El objetivo de desarrollar esta habilidad de pensamiento, es lograr que el estudiante construya una versión simplificada y abstracta de un sistema que opera en la realidad, que capture los patrones clave y los exprese mediante símbolos matemáticos (Mineduc, 2014). Se inicia con el empleo de formas simples de modelamiento, continuando en la enseñanza secundaria con la aplicación de modelos lineales que representan la relación entre variables hasta modelar situaciones diversas a través de funciones. Por otra parte, las gráficas que permiten apreciar el comportamiento de las funciones, estudiar las propiedades de las mismas, observando su dominio, crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos, continuidad y periodicidad, son tratadas como la representación del concepto de función, no como una manifestación de los usos del conocimiento. Las gráficas son curricularmente abordadas en el penúltimo nivel de primaria en el eje temático denominado algebra y funciones, pero sin asociarlas explícitamente al concepto de función. Sólo a partir del último nivel de primaria, aparece el concepto de función descrito y ejemplificado con gráficas cartesianas como una forma de responder a los comportamientos de las curvas asociadas.

En el contexto internacional, el estudio del uso de las gráficas se está consolidando como una línea de investigación en la que se estudian las prácticas de referencia asociadas a la graficación en el discurso matemático escolar (Suarez y Cordero, 2010). Según Buendía

(2012) las tareas que el profesor de matemáticas tiene que desarrollar, en el marco de referencia que el sistema educativo brinda a las gráficas cartesianas, están referidas a lograr la correcta articulación de los elementos semióticos que la componen, favorecer el tránsito desde un registro gráfico hacia el analítico, lograr la adecuada interpretación. Ante ello, lo que se adquiere –incluyendo al profesor– es un uso instrumental de los símbolos matemáticos inmersos sin entender los conceptos representados. Le cabe al profesor entonces, proponer tareas que promuevan lo que Duval (1988) ha señalado como conversiones directas entre registros de representación.

Los trabajos orientados hacia la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en un ambiente tecnológico de Torres (2004), de Flores (2005) en Suarez y Cordero (2010) y de Cen (2006), han aportado información sobre el tipo de gráficas que se encuentra actualmente en la educación primaria y secundaria, proporcionando evidencias de que el uso de ellas tiene un desarrollo que sustenta una construcción de conocimiento matemático. En estos estudios de uso de las gráficas (Cordero y Flores, 2007) existe una intención de caracterizar a la graficación como un conocimiento con estructura y desarrollo propio.

Se ha estudiado la graficación en el discurso matemático escolar bajo la perspectiva socio epistemológica (Cordero, 2005; Buendía y Cordero, 2005; Domínguez, 2003; Campos, 2003; Rosado, 2004; Flores, 2005). En estas investigaciones, se parte de dos premisas fundamentales: por una parte, que la matemática funcional es aquel conocimiento que deberá integrarse a la vida para transformarla, reconstruyendo significados permanentemente; y por otra, que el volumen y carácter de los conocimientos adquiridos por el hombre viene determinado por el nivel de desarrollo de las prácticas sociales; es decir, por el grado de su dominio sobre el mundo exterior. Los autores de estas investigaciones han relacionado las prácticas de graficación, modelación y predicción, donde el comportamiento de las curvas anticipa la tendencia de comportamiento local y global, centrando su atención en los usos y desarrollo de prácticas de la graficación y, de este modo, han posibilitado un acercamiento a la matemática funcional (Dolores y Cuevas, 2007).

Específicamente, Cen (2006) en el marco de un estudio socioepistemológico, plantea que la construcción de gráficas permite al estudiante colocar en juego actitudes de argumentación, es decir, se puede construir y explicar un conocimiento matemático mediante

la graficación, del mismo modo que la actividad de graficación se puede incorporar en las prácticas institucionales en el modelo de conocimiento, dando cuenta del conocimiento matemático y las causas reales de tal conocimiento. Por su parte Torres (2004) señala que los significados y sistemas simbólicos se encuentran directamente en las gráficas. Estos significados pueden detectarse a través del análisis cualitativo de las gráficas de la posición y de la velocidad. Los significados se verán reflejados en las relaciones que los estudiantes logren establecer, es decir, a través de las gráficas de la posición y de la velocidad se pueden identificar intervalos que indiquen cuándo el movimiento es más lento, más rápido o el cuerpo se detiene, y cuándo la velocidad es positiva o negativa.

Describir la manera en la que estudiantes de distintos niveles de escolaridad representan el movimiento de objetos, tanto por medio de gráficas cartesianas como a través de dibujos, ha sido una labor que varios investigadores han realizado en Educación Matemática (Clement, 1989; DiSessa et al, 1991; Nemirovsky, 1994; Nemirovsky, Tierney y Wright, 1998; Sherin, 2000; Doorman, 2005). De estas investigaciones se puede inferir que, para el estudiante novicio, el estudio de fenómenos relacionados con el movimiento no es una tarea fácil de llevar a cabo. Por otra parte, la utilización de gráficas cartesianas y fórmulas algebraicas en la investigación del movimiento, requiere la comprensión del funcionamiento de una forma cultural de descripción gráfico-visual que subraya tanto aspectos cualitativos como cuantitativos del movimiento a través de una semiótica compleja que está lejos de ser transparente para el alumno (Miranda et al, 2007).

Para Miranda et al (2013) los objetos matemáticos son generados por los individuos en el transcurso de su desarrollo histórico cultural; en específico, estos objetos no son entidades substanciales. Los objetos son entendidos como formas culturalmente codificadas de movimiento, y basado en la teoría de la objetivación, las gráficas cartesianas en las que se representa el movimiento lineal de objetos, son signos de una actividad de reflexión sobre el movimiento, reflexión que ha quedado incrustada en la cultura occidental desde la primera mitad del siglo XIV.

Radford (2009) considera a la gráfica cartesiana como signo o como objeto de mediación semiótica de cierta forma histórico-cultural de pensar el movimiento, implica una reorganización en la manera de concebir el aprendizaje de dicha gráfica. Con el fundamento

epistemológico de la teoría de la objetivación se describe, precisamente, el lineamiento general de esa reorganización por medio de la concepción sociocultural del aprendizaje. Para este autor, el pensamiento no se produce únicamente en la mente, sino también a través de una coordinación sofisticada del lenguaje, el cuerpo, los gestos, los símbolos y las herramientas. Es más, la mayoría de las entidades abstractas en matemática son creadas por medio de mecanismos cognitivos que extienden la estructura de las experiencias corporales (Núñez, 2004, en Yoon, Thomas y Dreyfus, 2011). De este modo la gestualidad, cobra un rol más complejo que dar un énfasis a la comunicación y se constituye en parte de los procesos de aprendizaje, asociada a la mejora en el aprendizaje de la matemática, destacándose como un importante recurso pedagógico para la enseñanza en el aula (Yoon, Thomas y Dreyfus, 2011)

Carrasco y Gordillo (2014) al abordar el estudio de prácticas de figuración, entendidas como prácticas de construcción e interpretación de una figura plana de entidades que se distinguen en un fenómeno de variación, conforman la noción de espacio epistémico de figuración, que se constituye en el acto de construir e interpretar figuras de fenómenos de variación, al ponerse en interrelación compleja a los estudiante con el ambiente, con una figura y con un fenómeno. Un espacio perceptivo, operacional y experiencial, en el cual ocurre la interacción entre quienes interpretan una gráfica y en el espacio gestual matemático, concurre al acto de conocer que se da en la interpretación de la gráfica.

Metodología

Se desarrolló este estudio durante el año 2014 en el marco de una investigación descriptiva y exploratoria de naturaleza cualitativa, sustentado en estudio de caso y complementado con entrevistas. La identificación de las figuraciones realizadas por los estudiantes tienen lugar en la sala de clases, y el propósito de dar cuenta de su sentido y de sus efectos en la tarea propuesta, justifican la elección de un estudio cualitativo. Los sujetos de análisis lo conformaron cuatro estudiantes de tercer año de enseñanza secundaria (16 años) pertenecientes a un establecimiento educacional particular subvencionado.

Con la finalidad de lograr una caracterización de los entendimientos estudiantiles previo al manejo de las gráficas y para la construcción de modelos que les permitan describir la variación de la posición y la velocidad en una situación de movimiento, en una clase ordinaria de matemáticas en un Liceo de Santiago en Chile, se utilizó una situación problema

previamente validada y desarrollada por Flores (2007). Es un problema de movimiento que para su aplicación original, el autor utilizó calculadoras con poder de graficación y sensor de movimiento (CBR). Para efectos de esta investigación, no se usó la tecnología.

Para el análisis de las producciones de los estudiantes, se consideraron dos niveles. Un primer nivel basado en el modelo propuesto por Torres (2004), que busca identificar las visiones locales y globales de la gráfica. Un segundo nivel de análisis que describe cada figuración a partir del grado de iconicidad y textualidades asociadas.

El contenido de la situación problema seleccionada para esta investigación, estaba en correspondencia con el programa curricular de matemáticas que cursaban los estudiantes. Éste establece que ellos deben adquirir conocimientos sobre el significado de la pendiente de una recta (por ejemplo, en el contexto del movimiento de objetos), así como de la fórmula $v = d/t$. Las gráficas cartesianas que representan el movimiento lineal de objetos con velocidad constante son generalmente usadas por los profesores de matemáticas cuando enseñan las representaciones gráficas de funciones de la forma $f(x) = mx+b$. Es común que el análisis de este tipo de gráficas consista en pedir a los estudiantes que, dado un tiempo específico, determinen la distancia recorrida por el objeto.

Problema:

La situación problema que a continuación se expone, fue propuesta a los alumnos en una primera sesión de trabajo:

Valentina llegó temprano a su clase de música. A punto estaba de sentarse cuando advirtió que había olvidado su cuaderno en su refugio predilecto: la siempre cómoda y acogedora biblioteca. No podía perderse el comienzo de la clase, así que fue a la biblioteca, cogió su cuaderno y regresó a su asiento, a tiempo para comenzar su, probablemente disfrutable, clase de música. Pero en el camino se encontró a su bien amado Juan y se detuvo a intercambiar algunas muestras de su muy auténtico cariño, lo que le llevó 4 minutos, pero de los largos, lo que la obligó a recuperar estos instantes”. La biblioteca está en un punto diametralmente opuesto del salón de música en el patio circular, que tiene 500 metros de diámetro, de la escuela. Valentina tardó en total 9 minutos. (Flores, 2007, p.32).

La historia del problema considera las diferentes posiciones en las que se puede encontrar la persona, así como la identificación de manera en que ella realiza el movimiento

(rápido, lento, más rápido, detenido), y el tipo de velocidad que se relaciona con cada cambio de dirección. En esta actividad se busca que los estudiantes comprendan el problema, y puedan construir una gráfica que represente los cambios de posición con respecto al tiempo, transitando por un ciclo de exploraciones previas a la construcción de ella. Básicamente, en el momento de realizar esta tarea los estudiantes deben tomar decisiones sobre las variables que intervienen, la escala de la gráfica y las distancias recorridas en distintos instantes.

Las exploraciones y reflexiones permiten incorporar los significados generados por los estudiantes para la construcción de una apreciación cualitativa de la velocidad durante el recorrido a partir de la gráfica de la posición con respecto al tiempo. En este sentido, la actividad de aprendizaje planteada permite la construcción de conocimiento a partir de la simulación y modelación.

Resultados y Análisis

De acuerdo a la estructura de las actividades de modelación-graficación la sesión se organizó en dos partes. En la primera los estudiantes leen y resuelven el problema a lápiz y papel; en la segunda parte son entrevistados respecto al trabajo realizado por ellos.

Primer nivel de análisis

Para el primer nivel de análisis de las producciones, se utilizó el modelo propuesto por Torres (2004), el que busca identificar las visiones locales y globales de la gráfica. Se espera que los estudiantes logren identificar aspectos locales y globales de las gráficas tanto de la posición como de la velocidad cuando sólo se usen trazos rectos o bien trazos rectos y parábolas como serían: la forma de las gráficas, cuando la velocidad puede ser positiva, negativa o nula, cuando puede ir lento, rápido, más lento, más rápido o cuando se detiene.

Segundo nivel de análisis

Para el segundo nivel de análisis de las producciones estudiantiles, se describe cada figuración a partir del grado de iconicidad, como el grado de referencialidad de una imagen, es decir, la relación de apariencias entre la propia imagen y su referente ; se describe a partir de los componentes de la figura y su sintaxis, distinciones de percepción que provee la Gestal -leyes de percepción- articuladas desde la teoría de la imagen, propuesta por Barthes (1964) para quien la imagen porta una polisemia de significados, de los cuales el observador puede elegir

unos y descartar otros. Se busca reconocer el mensaje connotado a la figuración, el cual asocia un significado particular a un elemento de la figura.

Interpretaciones de los estudiantes

A continuación, en la Figura 1 se pueden apreciar las figuraciones previas usadas por la totalidad de los estudiantes para visualizar la situación problema.

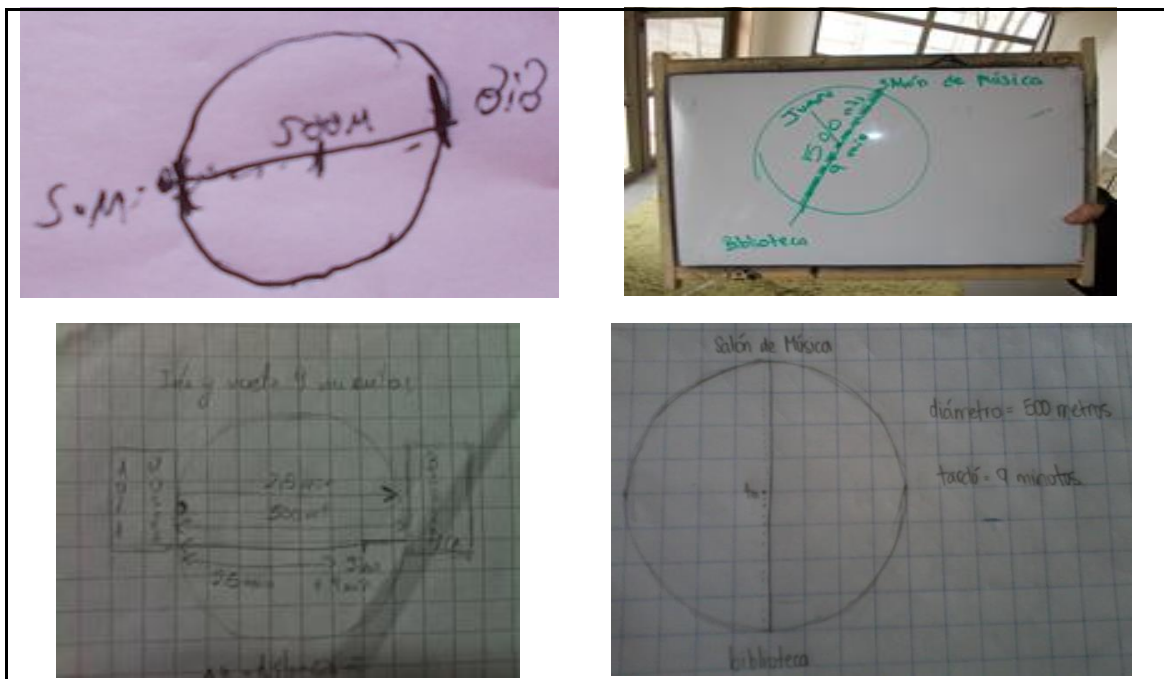


Figura 1: Primera interpretación de los estudiantes.

En primera instancia, en la Figura 1 se pueden apreciar que todos ellos comenzaron dibujando un círculo. En sólo una de ellas, se aprecian flechas a modos de vectores entre dos representaciones icónicas de los edificios de la escuela.

A continuación (Figura 2) se presenta la segunda interpretación relativa al problema propuesto.

En la figura 2, las figuraciones que levantan, responden a gráficas cartesianas cercanas al fenómeno, sin embargo para llegar a ellas, presentaron figuraciones no cartesianas preliminares como se aprecia en la anterior Figura 1.

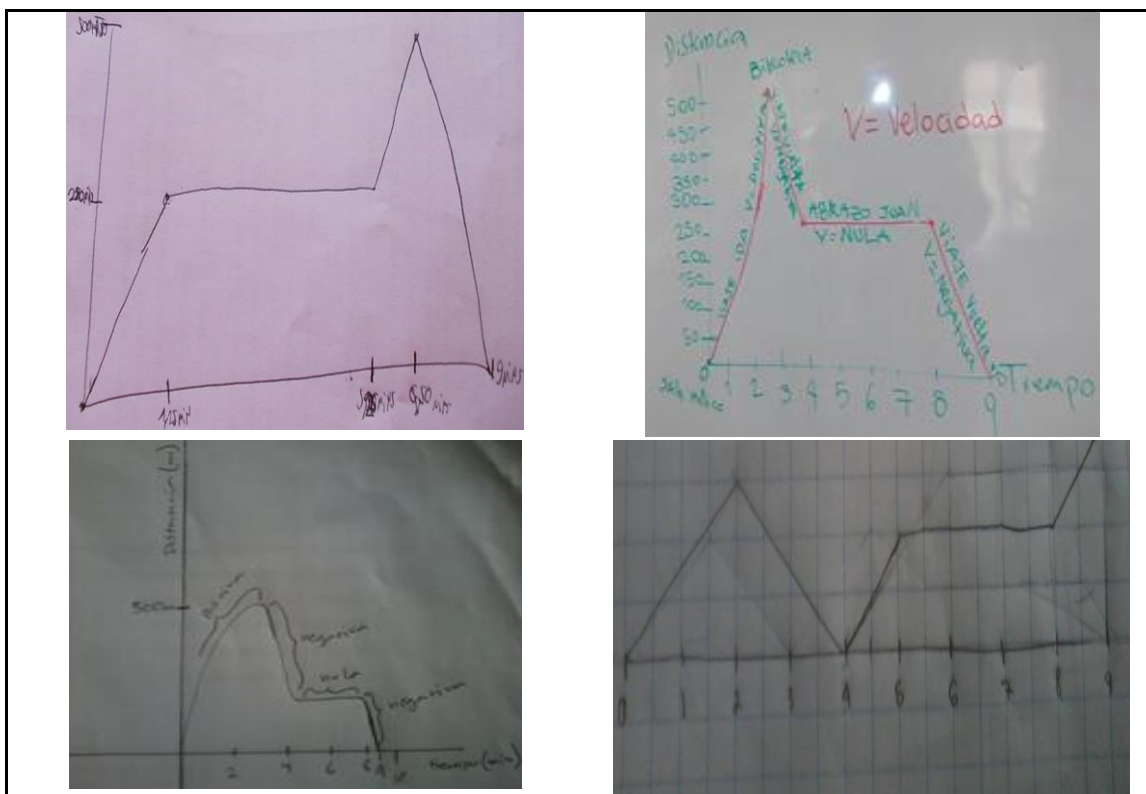


Figura 2: Segunda interpretación de los estudiantes: modelos gráficos de la posición y la velocidad

Análisis de las descripciones gráficas de la situación de movimiento

Respecto de la visión global del fenómeno, todos los estudiantes dan una visión global de los cambios de posición, sin embargo uno solo de ellos logra hacer trazos curvos que dan cuenta de los cambios de velocidad. Es una figuración que pareciera quedarse en la visión global del desplazamiento.

De forma local, en la construcción de la gráfica cartesiana, los estudiantes plantean la situación problema en base a dos ejes (tiempo/distancia). Se presentan diferencias en quienes gradúan los ejes y en los que señalan solo los puntos donde la gráfica cambia. Los estudiantes, salvo una excepción, complementan con información textual señalando la velocidad positiva, velocidad negativa o nula. De acuerdo a la Figura 2, solo un estudiante describe el fenómeno de movimiento a través de rectas y parábolas. En la totalidad de las producciones restantes se utilizaron trazos rectos, por lo que no indican cuando existe un cambio de velocidad.

Se observa en las gráficas los cambios de dirección, marcando todos puntos de cambio de la curva, identificando en ella la nulidad de movimiento durante ciertos minutos, distribuida de diferentes formas según el entendimiento del problema de cada estudiante a lo largo de los minutos en los que transcurre la acción. Recurren a descripciones del espacio y la traza del movimiento, dejando implícito aspectos de ello. Dos estudiantes representan el movimiento que envuelven a la acción. La porción de realidad que figuran los estudiantes responde al escenario donde se realizaba el movimiento, realizando una representación gráfica de la descripción. El repertorio de elementos lo constituyen el patio circular, el diámetro con su medida, y textualidades para señalar la ubicación del salón y la biblioteca, además de aportar información al contexto.

Secuencias de representación de los estudiantes

A continuación, se pueden apreciar dos sintaxis en las figuras propuestas por los estudiantes 1 y 2.

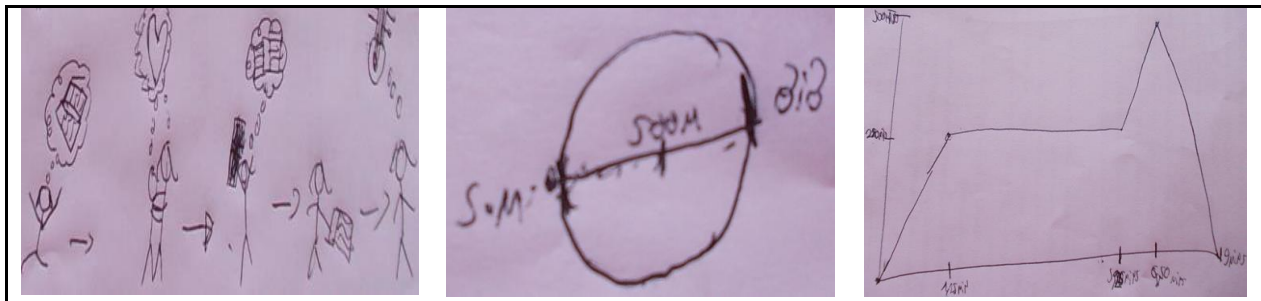


Figura 3: Secuencia de movimiento, contexto y gráfica realizadas por Estudiante 1

La figura 3 corresponde al Estudiante 1, y se puede apreciar en ella que realiza un dibujo previo representando las diversas situaciones por las que pasa Valentina, plasmada en un cómic con cinco escenas de una persona en posición de caminata, marcando en la iconicidad del dibujo el desplazamiento. Representa en forma circular la situación problema, incorporando las distancias y la ubicación del salón de música y la biblioteca. Se aprecia que realiza su gráfica considerando dos variables: tiempo en minutos y distancia en metros. En el eje tiempo, solo indica el punto en que se cambia la dirección, sin utilizar minutos exactos, y para la realización de la gráfica utiliza sólo trazos rectos.

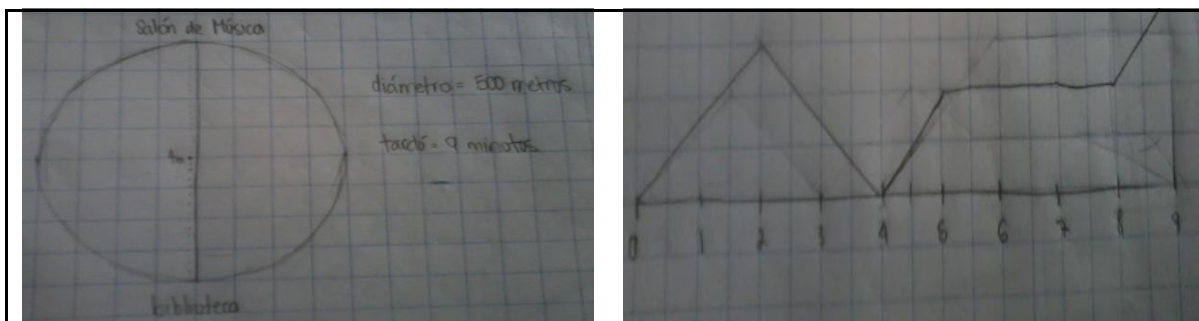


Figura 4: Secuencia de contexto y gráfica realizadas por Estudiante 2

En la figura 4 que corresponde al Estudiante 2, se observa un dibujo previo para entender la situación. Realiza su gráfica solo en torno a la variable tiempo, por tanto no presenta un sistema de coordenadas. Para el Estudiante 2, la situación comienza en la biblioteca, ya que ella en la entrevista señaló que si “se le había olvidado en la biblioteca, es porque ahí había partido”, por esto en su gráfica es posible observar un momento menos que en la producción del Estudiante 1. En el eje tiempo (el único realizado) gradúa en minutos de uno en uno, partiendo desde el cero hasta el nueve. Para la realización de la gráfica utiliza solo líneas rectas y en relación al eje tiempo. Se observa que los intervalos consideran esta única variable coincidiendo siempre los cambios de posición de forma exacta con los minutos. No identifica cambio de velocidad, pero si claramente el cambio de dirección.

En síntesis, de acuerdo a ambas figuras, se puede apreciar que construyen la figuración de forma secuencial, utilizando instantes de referencia, indicando cambios de posición, así como connotaciones que forman parte de instantes posteriores al momento de referencia. El nivel de iconicidad de las figuraciones es alto, y es posible identificar las relaciones espaciales del fenómeno al complementar esta figuración con la representación del escenario donde se realiza el movimiento.

En un análisis general, podemos indicar que la representación del patio circular y de la ubicación de la sala de música y de la biblioteca dan encuadre y espacialidad a la zona en que se figuran los movimientos que realiza Valentina. Se constituyen en fondo y marco de la figura, que permiten al estudiante focalizar en un contexto la mirada en las trayectorias propuestas. Marcan en los puntos en que cambia el movimiento con los valores numéricos presentes en el enunciado y así indican las distancias a recorrer. El movimiento, queda implícito en las líneas, las cuales invitan a ojo a recorrer una trayectoria en la imagen.

Mayoritariamente recurren a las líneas para expresar los movimientos de Valentina, pero en ninguno de los casos, establecen la función por tramos resultante de todo su trayecto, así como tampoco logran la función por tramos resultantes de la velocidad. Cabe hacer notar que no existen evidencias de la construcción de conocimiento alcanzado sobre el concepto de pendiente, ya que no argumentan la relación de velocidad y pendiente en la gráfica de posición.

Entrevista

Las entrevistas se aplicaron en la segunda sesión de investigación. A continuación se expone la transcripción de un fragmento de entrevista realizada por el profesor- investigador al Estudiante 1:

Profesor : *“¿Qué representa la gráfica que realizaste?”*

Estudiante 1: *“Representaba el movimiento que el ejercicio denomina positivo o negativo. Yo pienso que una manera de representarlo entonces es que el gráfico representa el tiempo en el que se mueve entre los espacios y su velocidad ”*

Profesor : *“En tu construcción realizaste dos dibujos auxiliares. ¿Qué función cumple cada uno de ellos en la construcción de la gráfica”*

Estudiante 1: *“La circunferencia representa el espacio que recorre Valentina en la biblioteca y la sala de música que tiene una distancia de 500 metros, que es la distancia del patio. Es para ayudarme a representar visualmente lo que tengo en la cabeza ya que es más fácil de entender...”*

Profesor : *“¿Qué función cumple la secuencia que realizaste?”*

Estudiante 1: *“Esta secuencia representa cada hecho que yo quiero que se destaque, ideas distintas separadas por puntos o comas”*

Profesor: *“Llama la atención que manifestaste cinco secuencias, que calzan con los puntos de cambio en la gráfica que realizaste”*

Estudiante 1: *“La verdad es que fue de manera inconsciente, en cierta medida yo representé las cosas que tenía en la cabeza, ya que me pidieron que lo represente y sólo tenía una idea en la cabeza sin darme cuenta la traduje a gráficos y dibujos”*

Profesor: *“¿Lo que señalas es que la secuencia del cómic representa lo mismo que la gráfica cartesiana?”*

Estudiante 1: *“Sí”*

Profesor: *“La gráfica cartesiana sólo utiliza tramos rectos, ¿sentiste necesidad de otro tipo de trazos?”*

Estudiante 1: *“ La verdad es que los cambios de velocidad son muy pequeños, por lo que casi asumí una velocidad constante”*

Profesor : *“En el cómic representas la transición con flechas, ¿qué significa”*

Estudiante 1: *“Fue una forma de reemplazar las viñetas y organizar porque mis habilidades artísticas son limitantes, y quise hacer la secuencia lo más entendible posible y separar mis ideas”*

Profesor: *“En una primera interpretación la flecha representó movimiento, no una separación estática, ya que la flecha indica dirección pero podría haber sólo sido un guión”*

Estudiante 1: *“También podría representar la dirección de lectura, posiblemente la flecha no fue el símbolo más preciso”*

Profesor : *“Si no hubieses realizado la circunferencia o el cómic ¿podrías haber construido la gráfica?”*

Estudiante 1: *“Hubiese sido mucho más lento el proceso para conseguirlo de esa manera, ya que si bien es un dibujo super básico y es algo que tenemos en la cabeza, tenerlo visualmente nos permite verlo en perspectiva y entender cómo se está realizando el movimiento, además de ver si el movimiento es positivo o negativo. En el caso del dibujo es sólo para representar la situación, en mi opinión es más importante el dibujo de la circunferencia ya que este tiene la información que yo entendí”*

La entrevista pone de manifiesto el hecho que enfrentarse a la tarea de hacer la gráfica del movimiento cumple con el rol de escenario en el cual se desarrolla y representa el movimiento, ambos icónicos y de alto simbolismo, y presentan una representación figurativa del fenómeno. Estos elementos fueron utilizados por los estudiantes, como etapas previas para la mejor comprensión de la situación, que posteriormente finalizó con la realización de la gráfica cartesiana.

Discusión y Conclusiones

Se escogió una situación para estudiar la gráfica de un fenómeno real de movimiento en el contexto de la resolución de un problema. En esta actividad se buscó que cuatro estudiantes de tercero de enseñanza secundaria comprendieran el problema, y a partir de ello explicitaran prácticas de figuraciones para llegar a registros -considerando los cambios de posición de ida y vuelta con respecto al tiempo- de tal manera que al cambiar las características del movimiento pueden identificar los que se producen en la gráfica. De esta forma se logra el análisis de un fenómeno y al mismo tiempo su representación.

De acuerdo al objetivo de investigación y tomando en cuenta las características de las gráficas que hicieron los estudiantes, se puede concluir que lograron hacer una gráfica correspondiente a los cambios de posición, por lo tanto, lograron una visión global de la gráfica.

Si bien todos los estudiantes lograron la construcción de gráficas cartesianas, la visión local solo puntualiza eventos específicos de la situación planteada, dejando de lado la graduación por intervalos desde la mirada de los ejes, sin hacer visible posibles cambios en la velocidad de quien camina, asumiendo por tanto un movimiento constante, al utilizar mayoritariamente trazos rectos al graficar. Si bien sólo uno de ellos logró hacer trazos curvos, se puede concluir que la naturaleza de la tarea, es decir, partir de una situación para graficarla, hace que los estudiantes recurran a todo lo que saben para lograr la gráfica que se les pide.

Las construcciones de figuraciones no cartesianas, previa a la construcción de la gráfica cartesiana escolar, da cuenta de la necesidad de los estudiantes de representar el contexto y el movimiento de aquello que cambia en el fenómeno, lo que se evidenció en la totalidad de las construcciones de los estudiantes.

Respecto a las representaciones, estamos ciertos que cualquier persona tiene representaciones mentales, es decir, un conjunto de imágenes y de concepciones que puede

tener sobre una situación y sobre aquello que les está asociado. Las representaciones semióticas, es decir aquellos productos constituidos por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfica, figura geométrica) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a otros. Aunque como plantea Duval (1999), esto va más allá. Las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma.

Específicamente con respecto a la representación gráfica, en general los estudiantes pudieron establecer los diferentes tiempos y posiciones que establece el problema, emplearon como variables en el eje horizontal al tiempo y en el eje vertical a la distancia. Un par de estudiantes identificaron en la gráfica de la posición los intervalos cuando era lento, rápido, más rápido y cuando se detenía; con respecto a la velocidad identificaron los intervalos en que ésta se hacía constante, nula, positiva y negativa.

La utilización de figuraciones previas, va constituyendo una práctica socio escolar, toda vez que dos de los casos no responden a la misma institución educativa. Práctica que involucra la construcción de una representación figurativa del fenómeno, estructurando desde la evocación del mismo, dos elementos que dan sentido a la comunicación del fenómeno de variación: el escenario y/o marco en el que se desarrolla el movimiento- que en esta situación problema específico- considera las diferentes posiciones en las que se puede encontrar la persona, así como la identificación de manera en que ella realiza el movimiento (rápido, lento, más rápido, detenido), y el tipo de velocidad que se relaciona con cada cambio de dirección en un proceso que va despojando de elementos contextuales para poder graficar finalmente solo las variables solicitadas, y en una práctica de representación figurativa del fenómeno, a las que concurren aspectos socioculturales, cognitivos y matemáticos.

Las figuraciones de los estudiantes nos permitieron obtener una visión de su conocimiento al realizar las gráficas y su interpretación con la intención de servir en la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Finalmente, a modo de conclusión proponemos establecer las prácticas de figuraciones previas a la gráfica cartesiana como elementos que dan significado al fenómeno y permiten establecer las características de este, que necesitan los estudiantes para la construcción del modelo gráfico, identificando una necesidad particular de cada individuo bajo una institucionalidad escolar.

Referencias

- Barthes, R. (1964). The Rhetoric of the Image. In S. Heath (ed.) *Image-Music -Text*, London: Fontana.
- Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Revista Educación Matemática*, v.24, n.2, pp.9-35.
- Buendía, G. ; Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspects generators of knowledge in social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics*, v.58, n.3, pp.299–333.
- Campos, C. (2003). *La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica*. Tesis inédita de Maestría. Cinvestav-IPN, D.F. México.
- Cantoral, R. ; Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, v.42, n.3, pp.854–856.
- Carrasco, E ; Gordillo, W. (2014). Figuración y gestualidad una forma de abordar la variación. *Actas Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.*
- Castro, E. (2008). Resolución de Problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. *Actas en Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, pp.113-140.
- Cen, C. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, D.F. México.
- Clement, J. (1989). The Concept of Variation and Misconceptions in Cartesian Graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, v.11, n.1-2, pp.77-87.
- Coll, C. (2007). Las competencias en la educación escolar: algo más que una moda y mucho menos que un remedio. *Aula de Innovación Educativa*, (161), pp.34-39.
- Cordero, F. (2005). La socioepistemología en la graficación del discurso matemático escolar. *Acta Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*, v.18, pp.477–482.
- Cordero, F. ; Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socio epistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, v.10, n.1, pp.7-38.
- Díaz, V. ; Poblete, A. (2013). Resolución de problemas en matemática y su integración con la enseñanza de valores éticos: el caso de Chile. *Boletim de Educação Matemática* v.27, n.45, pp.117-141.
- Díaz, V.; Poblete, A. (2016). Modelo de competencias profesionales de matemáticas y su implementación en profesores de la enseñanza primaria. *Boletim de Educação Matemática* (In press).
- Díaz, V. ; Poblete, A. (2014). Resolución de problemas en matemática desde la transversalidad: educar en valores éticos. *Paradigma*, v.35, n.2, pp.155-182.

- DiSessa, A. ; D. Hammer, B. Sherin & T. Kolpakowski (1991). Inventing Graphing: Meta-representational Expertise in Children. *Journal of Mathematical Behavior*, v.10, pp.117-160.
- Dolores, C. ; Cuevas, I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, v.10, n.1, pp.69-96.
- Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría. Cinvestav-IPN, D.F. México.
- Doorman, L. F. (2005). *Modelling Motion: From Trace Graphs to Instantaneous Change*. Disponible en :<http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2005->Acceso en: enero de 2015.
- Duval, R. (1988). Graphiques et Equations: l'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, v.1, pp.235-253.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, Colombia.
- Flores, R. (2005). *El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, D.F. México.
- Flores, R. (2007). *Variaciones simultáneas de primer y segundo órdenes en una situación de graficación y modelación de movimiento*. Tesis de Maestría publicada. Centro de investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.
- MINEDUC (2014) Ministerio de Educación Chile. *Programa de Estudio Matemática - 8° Básico, Marzo 2014*. Santiago: Impresos Universitaria.
- MINEDUC (2015) Ministerio de Educación Chile. *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media, Actualización 2009*. Santiago: Impresos Universitaria.
- MINEDUC. (2013). Ministerio de Educación Chile *Bases Curriculares 2013. Matemática 7° básico a 2° medio*. Santiago, Chile: Impresos Universitaria.
- Miranda, I. ; Radford, L. ; Guzmán, J. (2013). One Mathematical Origin vs. Two Phenomenological Origins: The Meaning of the Movement of Objects with Respect to the Point (0,0). *Journal of Research in Mathematics Education*, v.2, n.2, pp.183-208.
- Miranda, I.; Radford, L. ; Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Revista Educación Matemática*, v.19, n.3, pp.5-30.
- Nemirovsky, R. (1994). On ways of symbolizing: The case of Laura and the velocity sign. *Journal of Mathematical Behavior*, v.13, pp.389-422.
- Nemirovsky, R.; Tierney, C. ; Tracy, W. (1998). Body and Graphing. *Cognition and Instruction*, v.16, n.2, pp.119-172.
- OECD (2004). *Learning for tomorrow's world. First results from PISA 2003*. Paris: OECD.
- OECD (2007). *PISA 2006. Science competencies for tomorrow's world*. Vol 2. París: OECD.

- OECD (2009). *PISA 2009 Results: Learning Trends: Changes in Student Performance Since 2000*. (Volume V). Paris: OECD.
- OECD (2010). *PISA 2009 Results*. Paris: OECD.
- Pino, J. ; Blanco, L.J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de Matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, v.38, pp.63-88.
- Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, v.70, n. 2, pp.11-26.
- Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, D.F. México.
- Santos, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.
- Schoenfeld, A. H. (2008). Problem Solving in The United States, 1970-2008: Research and Theory, Practice and Politics. In G. Törner, A. H. Schoenfeld ; K. Reiss (Eds.), *Problem solving around the world – Summing up the state of the art*. Special issue of the Zentralblatt für Didaktik der Mathematik: Issue 1.
- Sherin, B. (2000), How Students Invent Representations of Motion: A Genetic Account. *Journal of Mathematical Behavior*, v.19, pp.399-441.
- Suárez, L. ; Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, v.3, n1, versión On-line ISSN 1850-6666.
- Suárez, L. ; Cordero, F. (2010). Modelación – graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, v.13, n.4-II, pp.319-333.
- Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN., D.F. México.
- Yoon, C.; Thomas, M. ; Dreyfus T. (2011). Grounded blends and mathematical gesture spaces: developing mathematical understandings via gestures. *Educational Studies in Mathematics*, v.78, pp.371-303.

Autores

Verónica Díaz, Dra.

Académica Investigadora del Departamento de Ciencias Exactas. Osorno. Chile.
Directora del Magister en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos en sus Campus Santiago y Osorno de Chile.
Co- Directora del Doctorado en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos, en sus Campus Santiago y Osorno de Chile. Línea de trabajo: Didáctica de la Matemática.

Iván Pérez, Mag.

Académico del Instituto de Matemáticas, Física y Estadística de la Universidad de Las Américas, Santiago, Chile. Magister en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos. Coordinador de la Carrera de Pedagogía en Matemáticas y Estadística de la Universidad de Las Américas.