

## **REDISEÑO DE UNA RED DE DISTRIBUCIÓN PARA UN GRUPO DE EMPRESAS QUE PERTENECEN A UN HOLDING MULTINACIONAL CONSIDERANDO VARIABILIDAD EN LA DEMANDA**

*ISABELA MAFLA<sup>1</sup> Y JOHN WILLMER ESCOBAR<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Pontificia Universidad Javeriana Cali. Departamento de Ingeniería Civil e Industrial.  
e-mail: ismagri@javerianacali.edu.co

<sup>2</sup> Pontificia Universidad Javeriana Cali. Departamento de Ingeniería Civil e Industrial  
Universidad del Valle. Departamento de Contabilidad y Finanzas e-mail: jwescobar@javerianacali.edu.co

Recibido: mayo 2013

Recibido en forma final revisado: julio 2014

### **RESUMEN**

Este artículo presenta el problema del rediseño de una red de distribución de gran escala considerando variabilidad en la demanda. La problemática central radica en la determinación de las decisiones de contracción de algunos de los eslabones de la red. El problema se ha formulado como un modelo de programación lineal estocástico de dos etapas. Las decisiones de la primera etapa son de tipo estratégico; mientras que las decisiones de la segunda etapa son de tipo táctico. El modelo está basado en el caso de un holding multinacional que cuenta con trece filiales y cuyos clientes internacionales se encuentran ubicados principalmente en Norteamérica y Latinoamérica. La estrategia de solución adoptada para el modelo propuesto es conocida como Sample Average Approximation (SAA). Dicha estrategia usa un esquema de aproximación por promedios muestrales para la solución de problemas estocásticos. Los resultados obtenidos reflejan la importancia y eficiencia de la metodología propuesta como alternativa para el tratamiento de la variabilidad en la demanda para redes de suministro de gran escala.

*Palabras clave:* Diseño de redes de suministro, logística, variabilidad de demanda, aproximación por promedios muestrales, programación lineal estocástica.

### **REDESIGN OF A SUPPLY CHAIN OPTIMIZATION FOR A GROUP OF COMPANIES WHICH BELONG TO A MULTINATIONAL HOLDING BY CONSIDERING VARIABILITY OF THE DEMAND**

#### **ABSTRACT**

This paper presents the problem of redesign of a supply chain by considering variability of the demand for a large-scale company. The main problem consists to determine the decisions of contraction of some echelons of the supply chain. The problem has been formulated as a two-stage linear stochastic model. The first-stage decisions are strategic, while the second-stage decisions are tactical. The model is based on a real-world case from a multinational holding, which considers 13 companies and international customers in North America and Latin-Americans countries. The solution strategy adopted is known as Sample Average Approximation (SAA). This strategy uses an approximation scheme by sample averages for solving stochastic problems. The results show the importance and efficiency of the proposed approach as an alternative to the treatment of the variability for large-scale supply chains.

*Keywords:* Supply Chain Design, Logistics, Variability of the Demand, Sample Average Approximation, Stochastic Linear Programming

#### **INTRODUCCIÓN**

Una red de abastecimiento está compuesta por diferentes eslabones. Las decisiones estratégicas y tácticas del diseño de una cadena de abastecimiento son difíciles de abordar debido a que requieren una evaluación detallada de la

inversión en términos de tiempo y dinero. El acertado diseño de una red de distribución es considerado una parte crítica de la rentabilidad global de una compañía, ya que esta decisión está íntimamente relacionada con los costos de transporte, distribución y almacenamiento. Las decisiones estratégicas en una red de distribución, están íntimamente

relacionadas con la configuración de la red. Dichas decisiones consideran cantidades de productos a fabricar, localización y número de instalaciones, determinación de capacidades, entre otras.

El enfoque de optimización de la cadena de abastecimiento decisiones de orden estratégico, se ha orientado en muchos aspectos e involucran diversas estrategias de solución. Varios trabajos han abordado el problema de localización y asignación de instalaciones con restricciones de capacidad en plantas y centros de distribución (Daskin, 1995; Vidal *et al.*, 1997; y Barros *et al.*, 1998). De igual forma, la medición del desempeño de una red de distribución se ha orientado en dos aspectos: nivel de satisfacción del cliente y el costo total logístico (Ali, 2006).

En el diseño de una red de distribución se debe seleccionar la alternativa de servicio que más se acerque a la estrategia de la compañía. Esta alternativa debe estar enmarcada en las características de distribución del producto hacia el cliente. De acuerdo con Chopra *et al.* (2007), existen seis configuraciones de redes de abastecimiento que se pueden considerar para el cumplimiento de las expectativas del cliente y la obtención de mayor rentabilidad: almacenamiento en planta con entrega directa al cliente, almacenamiento en planta con envío directo al cliente con combinación en tránsito, almacenamiento en un distribuidor con servicio de entrega de mercancía, almacenamiento en un distribuidor con entrega de la última milla, almacenamiento en planta o distribuidor con recogida del cliente y almacenamiento en detallista con recogida del cliente.

El presente artículo está relacionado con el rediseño de una red de distribución con variabilidad de la demanda para un grupo de empresas que pertenecen a un holding multinacional, el cual cuenta actualmente con trece filiales y treinta y siete centros de distribución y/o plataformas cross-docking en el territorio colombiano. En la actualidad, los costos de almacenamiento y transporte representan el 4.3% del total de ingresos brutos del holding.

En primera instancia se ha formulado un modelo de programación lineal entera mixta determinístico (DPL) que incluye tres eslabones: plantas, bodegas y clientes. En este modelo se consideran las demandas de los productos en cada zona de consumo como determinísticas. Luego, a partir del modelo DPL, se construye un modelo de programación línea entera estocástico (EPL), el cual incluye la variabilidad de la demanda de cada producto en cada zona de consumo. La estrategia de solución adoptada para el modelo EPL es conocida como Sample Average Approximation (SAA). Dicha metodología ha sido desarrollada por Kleywegt

*et al.* (2002) y utiliza un esquema de aproximación por promedios muestrales mediante Simulación Montecarlo a problemas de optimización lineal entera mixta estocásticos.

La principal contribución de este artículo es extender la literatura que trata casos de aplicación reales exitosos de rediseño de cadenas de abastecimiento que consideran variabilidad en la demanda. En particular, se evalúa la aplicabilidad y efectividad de un modelo lineal estocástico para la toma de decisiones estratégicas y tácticas en la contracción de una red de abastecimiento de gran escala.

En la sección 2 se presenta la revisión de la literatura del diseño de cadenas de suministro con elementos estocásticos. En la sección 3 se presenta la metodología experimental propuesta para el desarrollo de la problemática. Finalmente, resultados computacionales y conclusiones son presentados en las secciones 4 y 5 respectivamente.

## REVISIÓN DE LA LITERATURA

Los problemas de diseño de cadenas de abastecimiento se han convertido en una de las piedras angulares en el proceso de planeación estratégica de un amplio número de compañías nacionales y multinacionales (Owen *et al.*, 1998). En particular, las compañías deben competir actuando como una cadena, donde el éxito o el fracaso está determinado por la satisfacción final de los clientes (Christopher *et al.*, 2001).

En ambientes competitivos existen diversas condiciones de aleatoriedad e incertidumbre en los parámetros de diseño de una red de distribución, lo que da cabida a la formulación de modelos de programación estocástica. Según Santoso *et al.* (2005), un diseño de red de distribución robusto implica tener presente el grado de incertidumbre en los parámetros críticos, de manera que haya la posibilidad de disminuir las posibles ineficiencias operativas en las que se puede incurrir. Modelos robustos de diseño de redes probabilísticos que consideran la mayor cantidad de parámetros aleatorios posibles han sido estudiados por Tsiakis *et al.* (2001), Chen *et al.* (2006), Gabor *et al.* (2006), Escobar (2009), Escobar *et al.* (2012) y Escobar *et al.* (2013), entre otros. La mayoría de los modelos de diseño de redes bajo condiciones de incertidumbre consideran la minimización de los costos promedios o la maximización de los ingresos esperados (Snyder, 2006; Petrovic *et al.*, 2008).

Algunas aplicaciones interesantes en diseño de redes de distribución reales han sido propuestas por Ganeshan (1999), Daskin *et al.* (2002), Ambrosino *et al.* (2005), Romeijn *et al.* (2007) y Max *et al.* (2007). En Ganeshan (1999), se propone

un modelo de integración y sincronización del inventario entre distribuidores y bodegas que considera costos de almacenamiento y transporte para una compañía doméstica. En Daskin *et al.* (2002), se propone un modelo integrado de decisiones de localización y niveles de inventario para un número determinado de bodegas de producto terminado. En Ambrosino *et al.* (2005), se propone un modelo exacto para el diseño de una compleja red de distribución, en la cual se deben considerar decisiones de localización y ruteo simultáneamente. En Romeijn *et al.* (2007), se considera el diseño de una red de distribución con políticas de single sourcing. Finalmente, en Max y Qi (2007) se propone un modelo matemático para el problema de diseño de una cadena de abastecimiento estocástica, considerando la minimización de la suma de los costos de inventario y los costos de ruteo.

Las metodologías para el estudio de la variabilidad en el diseño de cadenas de abastecimiento se ha dividido en tres grandes categorías: aproximación basada en escenarios, aproximación probabilística y programación estocástica (Escobar *et al.*, 2012 y Escobar, 2012). Aun cuando las metodologías de aproximación probabilística y aproximación basada en escenarios han sido ampliamente estudiadas, según Goetschalekx *et al.* (2001), estas técnicas no son adecuadas para investigar y capturar en un camino sistemático las iteraciones de varios parámetros estocásticos de una cadena de abastecimiento. Debido a lo anterior, en el presente trabajo se ha desarrollado un modelo de programación estocástica de dos etapas, el cual explícitamente incorpora la variabilidad de la demanda en el rediseño de una red de distribución. El método permite generar un número limitado de configuraciones de la red de abastecimiento. Para cada configuración se genera  $N$  réplicas del modelo matemático, se calcula el valor esperado y la desviación estándar de los costos logísticos y finalmente se selecciona la mejor configuración. Uno de los aspectos interesantes de este trabajo es que se logra demostrar que para el caso de estudio, la configuración óptima determinística no es la mejor configuración óptima estocástica.

Uno de los trabajos relevantes en el diseño de redes de distribución estocásticas ha sido propuesto por Santoso *et al.*, (2005). En dicho trabajo se propone una integración entre el esquema de solución SAA con un algoritmo de descomposición acelerada de Benders para el diseño de una red de distribución internacional. Otros trabajos que consideran diseño de redes mediante programación estocástica pueden ser consultados en Chen *et al.* (2003), Listes *et al.* (2005), Snyder (2006), Gabor *et al.* (2006), Lieckens *et al.* (2007) y Escobar *et al.* (2012).

Aunque la literatura de modelos de redes estocásticas es extensa, son escasos los trabajos que han considerado la estrategia SAA como técnica de solución para el diseño de redes de gran escala reales. En Chouinard *et al.* (2008), se emplea dicha técnica para la minimización de los costos esperados de operación en una red de distribución. Recientemente, en Schutz *et al.* (2009), se utiliza la metodología de SAA para reducir el tamaño del problema en un caso real de gran escala.

## METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

### Modelo de diseño de red determinístico (DPL)

En esta sección se describe el modelo matemático propuesto para el rediseño de la red de distribución. En particular, para el modelo DPL se ha considerado los valores de la demanda promedio del producto  $p$  en la zona de mercado  $k$ .

#### Características y supuestos

- La infraestructura del modelo de diseño de red determinístico (DPL) está enmarcada en el territorio colombiano.
- El despacho de producto terminado a los clientes internacionales se considera hasta los puertos de Buenaventura y Cartagena.
- Se considera un proceso de distribución con múltiples eslabones: plantas, centros de distribución y/o plataformas cross-docking y zonas de consumo.
- El modelo incluye decisiones concernientes al cierre o consolidación de centros de distribución y/o plataformas cross-docking y la determinación del flujo de productos a través de la red. Debido a que la compañía caso de estudio se encuentra desarrollando una estrategia de contracción, el número máximo de bodegas y plataformas cross-docking no puede superar las actuales.
- El modelo de diseño de la red de distribución considera como primer eslabón las plantas de fabricación, las cuales no están sujetas a modificaciones de acuerdo con la directriz estratégica del holding. La capacidad de las plantas se considera como suficiente, esto debido a que el modelo está enfocado en el proceso de distribución física de los eslabones de almacenamiento hasta los clientes finales.
- Las plantas de producción solamente entregan producto a los centros de distribución y/o plataformas cross-docking.
- El modelo permite el envío de producto desde centros de distribución y/o plataformas cross-docking hacia clientes. No se considera limitación en la capacidad

de transporte.

- Se han definido políticas de inventario en cada centro de distribución.
- El modelo no incluye las decisiones de selección de modo de transporte.
- Para el modelo DPL, se trabaja con datos de demanda en unidades promedio de producto. Para efectos de análisis, se ha realizado una agregación por familias de productos.
- El lead time en una ruta determinada se ha considerado constante a lo largo del periodo de planeación.

La función objetivo del modelo propuesto es la minimización de los costos totales de la red del holding, considerando decisiones de cierre y consolidación de centros de distribución y/o plataformas logísticas.

### Notación del modelo DPL

#### Conjuntos principales

C = Zonas comerciales o clientes, indexados por  $k$   
 CD = Centros de distribución, indexados por  $j$   
 P = Plantas de producción, indexadas por  $i$   
 PD = Productos, indexados por  $p$

#### Subconjuntos

$C(j)$  = Zonas comerciales o clientes que pueden ser abastecidos por el centro de distribución  $j \in CD$ ; donde  $C(j) \subseteq C$   
 $CD(k)$  = Centros de distribución que pueden abastecer las zonas comerciales o clientes  $k \in C$ , donde  $CD(k) \subseteq CD$   
 $CD(i)$  = Centros de distribución que reciben de la planta  $i \in P$ , donde  $CD(i) \subseteq CD$   
 $P(p)$  = Plantas que fabrican el producto  $p \in PD$ , donde  $P(p) \subseteq P$

#### Variables de decisión

$X_{ijp}$  = Cantidad a fabricar en la planta  $i$  para entregar en el centro de distribución  $j$ , del producto  $p$  [Unidades de producto/Unidades de tiempo]  
 $Z_{jkp}$  = Cantidad a enviar desde el centro de distribución  $j$  hacia la zona comercial o cliente  $k$ , del producto  $p$  [unidades de producto/Unidades de tiempo]  
 $W_j$  = Variable binaria asociada a los centros de distribución que toma valores de “1”, cuando se decide mantener abierto el centro de distribución  $j$  u “0” de lo contrario

#### Parámetros

$CAPL_i$  = Capacidad de producción de la planta  $i \in P$  para todos los productos  $p \in PD$  ( $i$ ) [Unidades de peso/Unidades de tiempo]  
 $CACD_j$  = Capacidad instalada de los centros de distribución  $j \in CD$  para todos los productos  $p \in PD$  ( $i$ ) [Unidades de peso/Unidades de tiempo]  
 $CFC_j$  = Costo fijo de cierre de un centro de distribución  $j \in CD$  [\$/Unidad de tiempo]  
 $CFO_j$  = Costo fijo de operación de un centro de distribución abierto  $j \in CD$  [\$/Unidad de tiempo]  
 $CFA_j$  = Costo fijo de apertura de un nuevo centro de distribución  $j \in CD$  [\$/Unidad de tiempo]  
 $CMPCD_{jp}$  = Costo de manipulación del producto  $p \in PD$  en el centro de distribución  $j \in CD$  [\$/Unidad de tiempo]  
 $CVPDN_{ip}$  = Costo variable de producción del producto  $p \in PD$  en la planta  $i \in P$  ( $p$ ) [\$/unidad de  $p$ ]  
 $CT_{ij}$  = Costo promedio de transporte del producto  $p \in PD$  desde la planta  $i \in P$  hasta el centro de distribución  $j \in CD$  ( $i$ ) [\$/Unidades de peso]  
 $CTC_{jk}$  = Costo promedio de transporte del producto  $p \in PD$  desde el centro de distribución  $j \in CD$  hacia la zona comercial o el cliente  $k \in C$  ( $j$ ) [\$/Unidades de peso]  
 $DEM_{kp}$  = Demanda promedio del producto  $p \in PD$  en la zona comercial o cliente  $k \in C$  [Unidades de  $p$ /Unidades de tiempo]  
 $FS_{jp}$  = Factor de inventario de seguridad del producto  $p \in PD$  en el centro de distribución  $j \in CD$  [%]  
 $FP_p$  = Factor de peso por unidad de producto  $p \in PD$  [Unidad de peso/Unidad de  $p$ ]  
 $R$  = Costo mantenimiento del inventario [%/año]  
 $TE_{jk}$  = Tiempo promedio de entrega de los productos desde el centro de distribución  $j \in CD$  hasta la zona comercial o cliente  $k \in C$  [Unidades de tiempo]  
 $CP_p$  = Costo unitario de los productos  $p \in PD$  [\$/]  
 $DCD$  = Número de días a considerar en las políticas de niveles de inventario en los centros de distribución

#### Función Objetivo

*Costos fijos de cierre, operación y apertura de centros de distribución y/o plataformas cross-docking*

Los costos fijos de cierre, operación y apertura de centros de distribución y/o plataformas cross-docking, están dados por las ecuaciones (1), (2) y (3) respectivamente:

$$\sum_{j \in CD} CFC_j \times (1 - W_j) \quad (1)$$

$$\sum_{j \in CD} CFO_j \times W_j \quad (2)$$

$$\sum_{j \in CD} CFA_j \times W_j \quad (3)$$

*Costos variables de producción*

Estos costos están relacionados con la fabricación de productos para satisfacer la demanda de los clientes. La ecuación (4) muestra dichos costos:

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in CD} \sum_{p \in PD} CVPDN_{ip} \times X_{ijp} \quad (4)$$

*Costos totales de transporte*

Los costos de transporte de producto terminado desde las plantas a los centros de distribución se modelan mediante la ecuación (5):

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in CD} \sum_{p \in PD} CT_{ij} \times (FP_p \times X_{ijp}) \quad (5)$$

Los costos de transporte desde los centros de distribución a las zonas comerciales o clientes se modelan mediante la ecuación (6):

$$\sum_{j \in CD} \sum_{k \in C} \sum_{p \in PD} CTC_{jk} \times (FP_p \times Z_{jkp}) \quad (6)$$

*Costos de inventario de seguridad*

Corresponden al rubro que se debe incurrir para mantener el inventario de seguridad en los centros de distribución, con un nivel de seguridad que satisface la demanda de los clientes. Este costo es representado mediante la ecuación (7):

$$\sum_{j \in CD} \sum_{k \in C} \sum_{p \in PD} (CP_p \times R) \times (FS_{jp} \times TE_{jk}) \times Z_{jkp} \quad (7)$$

*Costos de manipulación de productos en centros de distribución*

Los costos de manipulación se representan mediante la ecuación (8):

$$\sum_{j \in CD} \sum_{k \in C} \sum_{p \in PD} CMPCD_{jp} \times Z_{jkp} \quad (8)$$

**Restricciones**

*Restricciones de capacidad de producción*

Este conjunto de restricciones limita el flujo de productos  $p$  que sale desde la planta  $i$  hacia el centro de distribución  $j$ :

$$\sum_{j \in CD} \sum_{p \in PD} X_{ijp} \leq CAPL_i \quad \forall i \in P \quad (9)$$

*Restricciones de capacidad de centros de distribución*

Las restricciones de capacidad de los centros de distribución están asociadas a la apertura o cierre de los mismos. Dichas restricciones están asociadas al flujo de entrada de productos al centro de distribución mediante las ecuaciones (10):

$$\sum_{i \in P} \sum_{p \in PD} FP_p \times X_{ijp} \leq CACD_j \times W_j \quad \forall j \in CD \quad (10)$$

*Ecuaciones de balance de los centros de distribución*

Las restricciones de balance de los centros de distribución se modelan mediante las ecuaciones (11):

$$\sum_{i \in P} X_{ijp} = \sum_{k \in C} Z_{jkp} \quad \forall j \in CD, \forall p \in PD \quad (11)$$

*Restricciones de cumplimiento de demanda*

La demanda de todos los clientes debe ser satisfecha en su totalidad por los centros de distribución, expresada mediante el grupo de ecuaciones (12).

$$\sum_{j \in CD} Z_{jkp} = DEM_{kp} \quad \forall k \in C, \forall p \in PD \quad (12)$$

*Restricciones de no negatividad*

$$X_{ijp}, Z_{jkp} \geq 0 \quad W_j \in \{0, 1\} \quad (13)$$

**Modelo de diseño de red estocástico (EPL)**

De acuerdo con Kleywegt *et al.* (2002), la función objetivo para problemas de optimización lineal estocásticos se puede formular de la siguiente manera:

$$\min_{x \in S} \{g(x) = E[G(x, W)]\} \quad (14)$$

En este caso  $W$  corresponde a un vector aleatorio con una distribución de probabilidad asociada  $h$ .  $S$  es un conjunto finito,  $G(x, W)$  es una función real de dos vectores de variables  $x$  y  $W$ , y  $E[G(x, W)]$  es el valor esperado correspondiente. Se asume que la función de valor esperado  $g(x)$  está definida, de modo que para cada  $x \in S$  la función  $G(x, W)$  se puede evaluar, y que el valor es finito,  $E[G(x, W)] < \infty$ . Para formular el modelo estocástico, se hace necesario considerar la siguiente formulación compacta del modelo DPL:

$$\min c^T w + u^T x + r^T z \quad (15)$$

Sujeto a:

$$w \in W \subseteq \{0, 1\}^{|P|} \quad (16)$$

$$Nx + Lz = 0 \quad (17)$$

$$Dy = d \quad (18)$$

$$Fx \leq s \quad (19)$$

$$Rx + Sz \leq Mw \quad (20)$$

$$x, z \in \mathbb{R}^+ \quad (21)$$

Los vectores  $c$ ,  $u$ ,  $r$ ,  $d$  y  $s$  corresponden a costo de producción, transporte, inventario, demanda y capacidades respectivamente. Las matrices  $N$  y  $L$  representan los lados izquierdos de la ecuación de balance (11) del modelo DPL. De igual forma, las matrices  $D$ ,  $F$ ,  $R$ ,  $S$  representan los lados izquierdos de las restricciones de demanda (12), capacidad de plantas (9) y capacidad de los centros de distribución (10) respectivamente.

Para denotar las características aleatorias del modelo, se empleará el vector  $\xi = (d)$ , el cual representa el componente probabilístico del problema de optimización EPL. De acuerdo con lo anterior, el problema EPL correspondiente a la primera etapa se puede formalizar de la siguiente manera:

$$\min_w f(w) := c^T w + E[Q(w, \xi)] \quad (22)$$

Sujeto a:

$$w \in W \subseteq \{0, 1\}^{|P|} \quad (23)$$

En esta notación, el vector  $c$  representa los costos asociados a las decisiones de cierre o apertura de centros de distribución. El valor esperado de  $Q(w, \xi)$ , corresponde al valor promedio de la función objetivo del problema de la segunda etapa (24) – (29), dada una configuración inicial seleccionada del problema de la primera etapa (22) – (23):

$$\min p^T x + r^T z \quad (24)$$

Sujeto a:

$$Nx + Lz = 0 \quad (25)$$

$$Dy = d \quad (26)$$

$$Fx \leq s \quad (27)$$

$$Rx + Sz \leq Mw \quad (28)$$

$$x, z \in \mathbb{R}^+ \quad (29)$$

En el problema EPL de segunda etapa, los vectores  $x$  y  $z$  representan las variables relacionadas con las cantidades a fabricar y enviar a los clientes. Nótese que el modelo EPL incluye dos etapas de decisión. La primera de ellas está asociada a las decisiones de cierre y apertura de centros de distribución y/o plataformas cross-docking, mientras que las decisiones de segunda etapa están asociadas a las variables de flujo del diseño de la red. De acuerdo con las características aleatorias que se le han incluido al modelo EPL, su valor objetivo es una función de variables de primer nivel ( $w$ ) y un escenario determinado del vector aleatorio ( $\xi$ ).

### Estrategia de solución SAA

La estrategia de solución SAA es una metodología para resolver problemas de optimización estocásticos usando Simulación Montecarlo. En el SAA, la función objetivo esperada de un problema de optimización estocástico es aproximada por el promedio simple derivado de unas muestras aleatorias. El problema de aproximación muestral resultante es solucionado mediante técnicas de optimización determinísticas. El proceso es repetido con diferentes muestras para obtener soluciones con sus respectivos estimadores estadísticos de la brecha de optimalidad.

En el esquema de solución SAA, se genera una muestra aleatoria  $\xi_1, \dots, \xi_N$  de  $N$  escenarios posibles del vector  $\xi$ , de manera que se pueda estimar el valor esperado de las muestras obtenidas  $E[Q(w, \xi)]$ . De acuerdo con lo anterior, la función objetivo (22) se puede reexpresar de la siguiente manera:

$$\min_{w \in W} \left\{ \tilde{f}_N(w) := c^T w + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Q(w, \xi^n) \right\} \quad (30)$$

Sea  $v_N$  y  $\hat{y}_N$ , el valor óptimo y el vector solución óptima del problema respectivamente (30). Según Santoso *et al.* (2005), bajo condiciones de relativa regularidad, a medida que el tamaño de la muestra  $N$  crece, los valores de  $v_N$  y  $\hat{y}_N$ , convergen a la solución óptima del problema original (22) – (23). De igual forma, según Kleywegt *et al.* (2002), el tamaño de la muestra requerido es a lo sumo lineal con respecto al número de decisiones de primer nivel que se deben considerar. Esto es fundamental, en la medida en que tiene relación con la complejidad computacional de la metodología SAA al resolver problemas de optimización lineal estocásticos de gran escala.

De acuerdo con Santoso *et al.* (2005), el algoritmo SAA se resume en cuatro pasos:

- 1) Generar  $M$  muestras independientes de tamaño  $N$  cada una, para  $j = 1, \dots, M$ . Para cada una de ellas resolver el correspondiente problema SAA:

$$\min_{w \in W} \left\{ c^T w + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Q(w, \xi_j^n) \right\} \quad (31)$$

Para cada  $j$ , es posible obtener el valor óptimo y la solución óptima respectiva,  $v_N$  y  $\hat{y}_N$ .

- 2) Calcular los siguientes indicadores estadísticos:

$$\bar{v}_{N,M} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M v_N^j \quad (32)$$

$$\sigma_{\bar{v},N,M}^2 = \frac{1}{(M-1)M} \sum_{j=1}^M (v_N^j - \bar{v}_{N,M})^2 \quad (33)$$

En este caso el valor de  $\bar{v}_{N,M}$  provee un límite inferior estadístico del valor óptimo real ( $v^*$ ) del problema original, mientras que (33) es un estimador de su varianza.

- 3) Seleccionar una solución factible  $\bar{w} \in W$  del problema real, usando como ejemplo la mejor de las soluciones  $\hat{w}_N^j$  calculadas en (31). Calcular el valor de la función objetivo de  $f(\bar{w})$ , por medio de (34):

$$\tilde{f}_{N'}(\bar{w}) = c\bar{w} + \frac{1}{N'} \sum_{n=1}^{N'} Q(\bar{w}, \xi^n) \quad (34)$$

En la ecuación anterior,  $(\xi_1^1, \dots, \xi_{N'}^1)$  es una muestra de tamaño  $N'$  independiente de las muestras usadas en el paso 1. En general, es usual tomar un valor  $N'$  mucho mayor que  $N$ .

Dado que las muestras son independientes y además idénticamente distribuidas, la varianza de (34) puede expresarse de la siguiente forma:

$$\sigma_{N'}^2(\bar{w}) = \frac{1}{(N'-1)N'} \sum_{j=1}^{N'} [c\bar{w} + Q(\bar{w}, \xi^n) - \tilde{f}_{N'}(\bar{w})]^2$$

En este caso, dado que el problema que se está resolviendo es de minimización, resulta natural seleccionar  $\bar{w}$  con el menor valor objetivo estimado  $\tilde{f}_{N'}(\bar{w})$ .

- 4) Calcular un estimado de la brecha de la optimalidad de la solución  $\bar{w}$  usando los resultados obtenidos en los pasos 2 y 3, como se indica a continuación:

$$gap_{N,M,N'}(\bar{w}) = \tilde{f}_{N'}(\bar{w}) - \bar{v}_{N,M} \quad (35)$$

La varianza estimada del gap se calcula de la siguiente forma:

$$\sigma_{gap}^2 = \sigma_{N'}^2(\bar{w}) + \sigma_{\bar{v},N,M}^2 \quad (36)$$

## RESULTADOS COMPUTACIONALES

### Características de la compañía caso de estudio

Los modelos DPL y EPL han sido validados con información real obtenida de un holding multinacional. En la actualidad dicho grupo cuenta con presencia en dieciocho países y mercado en más de cincuenta naciones del mundo. Los principales sectores en los cuales están enmarcadas las compañías que pertenecen al holding son empaques, papelería, impresión, editorial, directorios y formas continuas, música ambiental y muebles.

Para efectos del análisis de la metodología propuesta, se han seleccionado cuatro compañías del holding. La primera de ellas está dedicada a la fabricación y comercialización de productos de papelería. Su actividad productiva esencialmente se concentra en la fabricación de cuadernos escolares y libretas. La segunda compañía se dedica a la impresión de libros científicos y culturales, diccionarios, enciclopedias, revistas, directorios y cuadernos. La tercera compañía se encuentra enmarcada en el sector de fabricación de empaques flexibles y cajas plegadizas. La última compañía seleccionada se dedica a la fabricación y comercialización de muebles para oficina. Las distribuciones de probabilidad de la demanda obtenidas fueron binomial, uniforme y geométrica.

En la tabla 1, se muestra un resumen de las principales características de la red de distribución de cada una de las cuatro compañías seleccionadas:

**Tabla 1.** Características principales de la red para las compañías seleccionadas

	Compañía 1	Compañía 2	Compañía 3	Compañía 4
Número de clientes	840	280	400	1919
Zonas comerciales	7	28	4	9
Número de bodegas y plataformas cross-docking actuales	6	5	6	6
Familias de productos	13	8	4	9

Entre las plantas de producción y los centros de distribución y/o plataformas cross-docking existe un flujo continuo de productos por medio terrestre, el cual está a cargo de un operador logístico. Los productos de exportación se envían a un centro de distribución especial que está localizado en la ciudad de Yumbo (Colombia) y de ahí se despacha al respectivo puerto de embarque (Cartagena o Buenaventura) según el cliente. Los centros de distribución y/o plataformas cross-docking están en condiciones de enviar productos a los clientes nacionales y a los puertos de embarque. Como se puede observar en la figura 1, en la actualidad existen seis centros de distribución y/o plataformas cross-docking, los cuales comparten flujos de productos para las cuatro compañías. La figura 1 muestra la ubicación actual de los seis centros de distribución y/o plataformas cross-docking. En la actualidad, no se sabe con certeza si el número y ubicación de centros de distribución y/o plataformas cross-docking es óptimo.



Figura 1. Mapa geográfico de ubicación de los centros de distribución y/o plataformas cross-docking

## Resultados obtenidos

Los modelos de optimización descritos y sus estrategias de solución se han implementado en C++ y los experimentos han sido ejecutados en un Intel Core Duo CPU (2.00 GHz) con sistema operativo Windows 7 y 4 GB de memoria. Las distribuciones de demanda fueron obtenidas mediante el software Oracle Crystall Ball. Para resolver el modelo DPL y los diferentes subproblemas SAA se utilizó CPLEX 12.1.

## Modelo determinístico DPL

En la tabla 2, se resumen los resultados obtenidos del modelo determinístico DPL. La fila 2 indica el número de bodegas y/o plataformas cross-docking óptimas para cada compañía y finalmente la fila 3 indica la ubicación óptima de las bodegas y/o plataformas cross-docking.

De acuerdo con los resultados obtenidos en la tabla 2, se deberían mantener operando cuatro bodegas y/o plataformas cross-docking en las posiciones 1, 4, 5 y 6. De esta manera se debería cerrar la operación en las bodegas y/o plataformas cross-docking 2 y 3.

## Modelo estocástico EPL

Para la ejecución de la metodología SAA, se emplearon tres tamaños de muestra diferentes, los cuales han sido probados de manera efectiva en otras implementaciones con igual o mayor cantidad de variables y restricciones (Santoso *et al.* 2005 y Escobar *et al.* 2012). Los tamaños de muestra considerados son:

- $N = 20; M = 20; N' = 300$
- $N = 30; M = 20; N' = 400$
- $N = 40; M = 30; N' = 500$

La tabla 3 muestra los resultados obtenidos por el SAA para los distintos tamaños de muestra.

Tabla 2. Configuraciones obtenidas del modelo determinístico DPL

	Compañía 1	Compañía 2	Compañía 3	Compañía 4
Número de bodegas y plataformas cross-docking óptimas	3	3	4	4
Ubicación óptima de bodegas y plataformas cross-docking	1-4-6	4-5-6	1-4-5-6	1-4-5-6

Tabla 3. Resultados de la metodología SAA (cifras en millones de \$)

$N, M, N'$	$\bar{v}_{N,M}$	$\sigma_{\bar{v}_{N,M}}$	$\tilde{f}_{N'}(\bar{w})$	$\sigma_{N'}(\bar{w})$
20, 20, 300	27202469	2105182	27927463	11914022
30, 20, 400	27363515	3004301	27798772	11605949
40, 30, 500	28666247	2510003	28436793	11202956



De igual forma la tabla 4 muestra los resultados obtenidos para el  $gap_{N,M,N'}$  y  $\sigma_{gap}^2$ . La tabla 4 confirma que con tamaños de muestra razonables se obtienen soluciones cercanas al óptimo ( $gap < 3\%$ ).

**Tabla 4.** Resultados de la metodología SAA ( $gap_{N,M,N'}$  en % y  $\sigma_{gap}$  en millones de \$)

$N, M, N'$	$gap_{N,M,N'}$	$\sigma_{gap}$
20, 20, 300	2.75	9808839
30, 20, 400	1.59	8601647
40, 30, 500	0.80	8692653

**Tabla 5.** Configuraciones obtenidas de la metodología SAA con  $N = 40$ ;  $M = 20$ ;  $N' = 500$

	Compañía 1	Compañía 2	Compañía 3	Compañía 4
Número de bodegas y plataformas cross-docking óptimas	3	4	3	4
Ubicación óptima de bodegas y plataformas cross-docking	1-4-6	1-4-5-6	1-5-6	1-4-5-6

## CONCLUSIONES

En este artículo se ha considerado el rediseño de una red de distribución para un holding multinacional aspectos de demanda determinísticos (modelo determinístico DPL) y aspectos estocásticos (modelo estocástico EPL). Para solucionar el modelo estocástico EPL, se ha utilizado la estrategia algorítmica SAA, la cual usa un esquema de aproximación por promedios muestrales para la solución de problemas estocásticos. Se han comparado la configuración de bodegas y/o plataformas logísticas para ambos casos (determinístico y estocástico), confirmando la importancia de la consideración de la variabilidad de la demanda en el diseño de la red de distribución.

Los resultados obtenidos reflejan la importancia y eficiencia de la metodología propuesta como alternativa para el tratamiento de la variabilidad de la demanda en redes de suministro de gran escala. Los resultados obtenidos con la implementación del SAA son de gran importancia, ya que permiten un mayor acercamiento a la realidad de la operación de cada compañía mediante la consideración del riesgo en parámetros claves de la configuración de redes de distribución. De igual manera se ha demostrado que la metodología SAA ofrece soluciones cercanas a lo óptimo para problemas de programación estocástica lineal con tamaños de muestra pequeños.

Queda un interesante campo de investigación, el cual incluye entre otros los siguientes campos:

Dado que el  $gap_{N,M,N'}$  mide la cercanía de la solución óptima estocástica al problema real, se ha seleccionado los resultados óptimos de la configuración  $N = 40$ ;  $M = 20$ ;  $N' = 500$ , la cual tiene el menor valor de  $gap_{N,M,N'}$ . De esta manera se obtiene la tabla 5.

Es evidente que la configuración para el modelo determinístico DPL no es la misma para el modelo estocástico EPL. Esto confirma que la falta de consideración de la variabilidad en la demanda podría llevar a decisiones erróneas de configuración de redes de distribución.

- 1) Extensión de la red de distribución a clientes internacionales considerando precios de transferencia
- 2) Incluir estocasticidad en otros parámetros de la red de distribución
- 3) Incluir aspectos dinámicos de la red, que ayuden a tomar decisiones de acuerdo con la estacionalidad de la demanda para cada una de las empresas del holding multinacional
- 4) Incluir decisión de modo de transporte
- 5) Probar la eficiencia y aplicabilidad de otras metodologías para la solución de problemas de optimización lineal estocástica

## REFERENCIAS

- ALI A. (2006). Designing a distribution network in a supply chain system: Formulation and efficient solution procedure. *European Journal of Operational Research* 171(2); pp. 567-576.
- AMBROSINO D. & SCUTELLA, M.G. (2005). Distribution network design: new problems and related models. *European Journal of Operation Research* 165(3); pp. 610-624.
- BARROS A.I., DEKKER R., SCHOLTEN V. (1998). A two-level network for recycling sand: A case study. *European Journal of Operational Research* 110(2); pp. 199-214.
- CHEN C.L., WANG, B.W., LEE, W.C. (2003). Multiobjective optimization for a multienterprise supply chain network.

- Industrial & Engineering Chemistry Research 42(9); pp. 1879-1889.
- CHEN, G., DASKIN M. S., SHEN Z.-J., URYASEV S. (2005). The alpha-Reliable Mean-excess Regret Model for Stochastic Facility Location Modeling. *Naval Research Logistics* 53(7); pp. 617- 626.
- CHOPRA S., MEINDL P. (2007). *Supply chain management: Strategy, Planning & Operation*. New Jersey: Edition Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River. 1-528.
- CHOUINARD M., D'AMOURS S., AIT-KADI A. (2008). A stochastic programming approach for designing supply loops. *International Journal of Production Economics* 113(2); pp. 657-677.
- CHRISTOPHER M. & TOWILL D. (2001). An integrated model for the design of agile supply chains. *International Journal of Physical Distribution & Logistics Management* 31(4); 235 - 246.
- DASKIN M. (1995). *Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications*. New York: Wiley-Interscience. 1-536.
- DASKIN M., COULLARD C., SHEN Z.J.M. (2002). An inventory-location model: Formulation, solution algorithm and computational results. *Annals of Operations Research* 110(1-4); pp. 83-106.
- ESCOBAR J.W. (2009). Modelación y optimización de redes de distribución de productos de consumo masivo con elementos estocásticos *Proceedings of XIV Latin American Summer Workshop on Operations Research (ELAVIO)*, El Fuerte, México.
- ESCOBAR J.W. (2012). Rediseño de una red de distribución con variabilidad de demanda usando la metodología de escenarios. *Revista Facultad de Ingeniería UPTC* 21(32); pp. 9-19.
- ESCOBAR J.W., BRAVO J.J., VIDAL C.J. (2012). Optimización de redes de distribución de productos de consumo masivo en condiciones de riesgo. *Proceedings of XXXIII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa (SEIO)*, Madrid, España.
- ESCOBAR J.W., BRAVO J.J., VIDAL C. J. (2013). Optimización de una red de distribución con parámetros estocásticos usando la metodología de aproximación por promedios muestrales. *Revista Científica Ingeniería y Desarrollo* 31(1); pp. 135-160.
- GABOR A.F. & VAN OMMEREN J.C.W. (2006). An approximation algorithm for a facility location problem with stochastic demands and inventories. *Operations Research Letters* 34(3); pp. 257-263.
- GANESHAN, R. (1999). Managing supply chain inventories: A multiple retailer, one warehouse, multiple supplier models. *International Journal of Production Economics* 59(1-3); pp. 341-354.
- GOETSCHALCKX M., SHAPIRO A., AHMED S., SANTOSO T. (2001). Designing flexible and robust supply chains. *Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Production Management*, Dallas.
- KLEYWEGT A., SHAPIRO A., HOMEN-DE-MELLO T. (2002). The Sample Average Approximation Method for Stochastic Discrete Optimization. *Siam Journal Optimization* 12(2); pp. 479 - 502.
- LIECKENS K. & VANDAELE N. (2007). Reverse logistics network design with stochastic lead times. *Computers & Operations Research* 34(2); pp. 395-416.
- LISTES O. & DEKKER R. (2005). A stochastic approach to a case study for product recovery network design. *European Journal of Operational Research* 160(1); pp. 268-287.
- MAX SHEN Z.J. & QI L. (2007). Incorporating inventory and routing costs in strategic location models. *European Journal of Operational Research* 179(2); pp. 372-389.
- OWEN S.H. & DASKIN M. (1998). Strategic facility location: A review. *European Journal of Operational Research* 111(3); 423-447.
- PETROVIC D., XIE Y., BURNHAM K., PETROVIC R. (2008). Coordinated control of distribution supply chains in the presence of fuzzy customer demand. *European Journal of Operational Research* 185(1); pp. 146 -158.
- ROMELIJN H.E., JIA S., CHUNG-PIAW T. (2007). Designing two-echelon supply networks. *European Journal of Operational Research* 178(2); pp. 449 -462.
- SANTOSO T., AHMED S., GOETSCHALCKX M., SHAPIRO A. (2005). A stochastic programming approach for supply chain network design under uncertainty. *European Journal of Operational Research* 167(1); pp. 96-115.

- SCHUTZ P., TOMASGARD A., AHMED S. (2009). Supply chain design under uncertainty using sample average approximation and dual decomposition. *European Journal of Operations Research* 199(2); pp. 409-419.
- TSIAKIS P., SHAH N., PANTELIDES C.C. (2001). Design of multiechelon supply chain networks under demand uncertainty. *Industrial Engineering Chemistry Research* 40(16); pp. 3585–3604.
- SNYDER L.V. (2006). Facility location under uncertainty: A review. *IIE Transactions* 38(7); pp. 537–554.
- VIDAL C.J. & GOETSCHALCKX M. (1997). Strategic production–distribution models: A critical review with emphasis on global supply chain models. *European Journal of Operational Research* 98(1); pp. 1–18.