

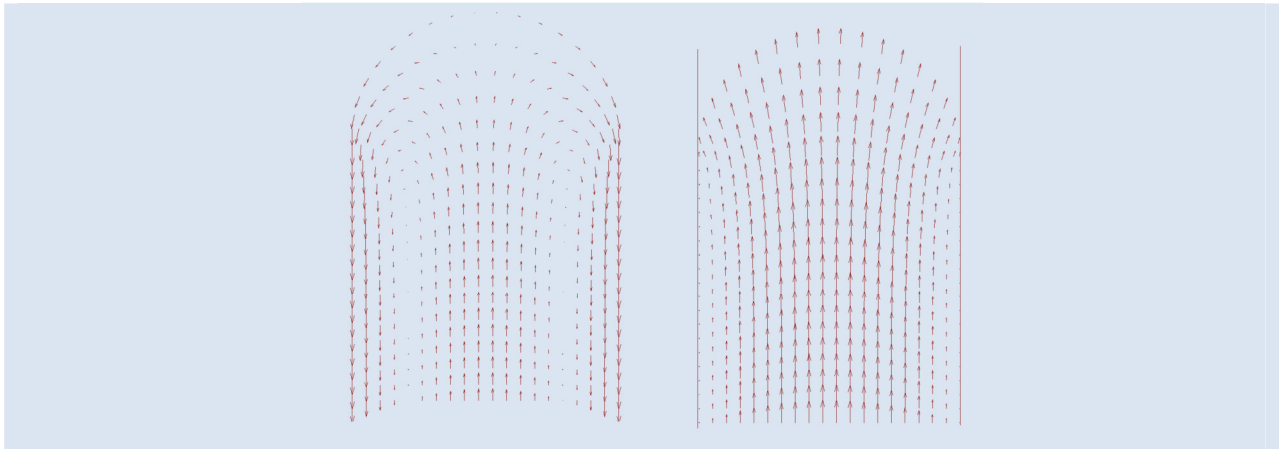
SIMULACIÓN DEL EFECTO DE FLUJO FUENTE USANDO UN MÉTODO LIBRE DE MALLA

Daniel Ramírez¹, Omar Estrada², Iván López^{2}, Tim A. Osswald¹*

1: Polymer Engineering Center, University of Wisconsin-Madison. 1513 University Avenue, Madison, WI 53706, Estados Unidos

2: ICIPC. Carrera 49 # 5Sur 190, Bloque 37, Medellín-Colombia.

* e-mail: ilopez@icipc.org

**RESUMEN**

El efecto de flujo fuente tiene importantes implicaciones en la calidad de partes inyectadas y moldeadas por compresión, debido a que afecta la orientación de las macromoléculas del polímero y por lo tanto, las propiedades mecánicas y ópticas de la parte final [1]. Cuando se utilizan materiales reforzados, los efectos del flujo fuente se hacen más críticos, ya que se afectan las orientaciones y distribuciones de las fibras. El efecto de flujo fuente es modelado usando un método sin malla, el método de funciones radiales (MFR). Se consideró una ranura plana en estado estacionario con un modelo de ley de potencias y el flujo de un fluido Newtoniano en un tubo vertical considerando efectos gravitacionales. Se encontró una buena correspondencia de los resultados con datos reportados en la literatura.

Palabras Claves: Inyección de polímeros, flujo fuente, método libre de malla, funciones de base radial.

SIMULATION OF THE FOUNTAIN FLOW EFFECT USING MESHLESS METHODS

ABSTRACT

The fountain flow effect affects the macromolecular orientation and therefore, the mechanical and optical properties of injection and compression molded parts [1]. The impact of the fountain flow effect is even higher in fiber reinforced materials, because the distribution and orientation of fibers is affected. The fountain flow effect is modeled using a meshless technique, the radial function method (RFM). Two cases are considered: a slit flow of a power law fluid and a vertical tube flow of a Newtonian fluid considering gravitational effects. A good agreement between the numerical prediction and results reported in literature was found.

Keywords: Fountain flow effect, polymer injection moulding, meshless method, radial basis functions.

1. INTRODUCCIÓN

El efecto de flujo fuente se genera por las condiciones de no deslizamiento en las paredes del molde, lo que hace que el material tenga que fluir del centro de la cavidad hacia las paredes. Debido a este efecto, se afectan la orientación de las macromoléculas del polímero y la distribución y orientaciones de fibras en materiales reforzados y por lo tanto, las propiedades mecánicas y ópticas de la parte moldeada [1]. Por otro lado, el estudio del efecto de flujo fuente es importante para el entendimiento de la micromorfología de las regiones de las líneas de unión, producidas por el encuentro de dos frentes de flujo durante el llenado de la cavidad del molde. Adicionalmente, el flujo fuente hace que el material con la mayor temperatura sea transportado hacia las paredes frías del molde, cambiando el desarrollo térmico de la pieza, lo que a su vez afecta a diversas variables del proceso, como el tiempo de ciclo y la aparición de efectos relacionados con la historia térmica del material, como son el encogimiento o contracción y la distorsión o alabeo de las piezas plásticas. A pesar de la importancia del efecto del flujo fuente, los programas comerciales de simulación de moldeo por inyección no lo reproduce adecuadamente, ya sea porque se utilizan aproximaciones de Hele-Shaw que desprecian las velocidades en la dirección del espesor, o porque las aproximaciones tridimensionales no alcanzan a detallar lo suficientemente bien el problema para describir la cinemática del frente de flujo.

Las primeras simulaciones del efecto de flujo fuente se desarrollaron en la década de los ochenta [2; 3; 4; 5; 6; 7]. Mavridis et al. [4] fueron los primeros en predecir la posición del frente de flujo para fluidos Newtonianos y pseudoplásticos usando los modelos de Carreau y de ley de potencias, con un método numérico que combina elementos finitos con un esquema iterativo para encontrar la forma del frente. En el trabajo de Mavridis, se mostró que la cinemática es básicamente la misma para estos fluidos, obteniendo líneas de flujo muy similares. Adicionalmente, encontró que para un fluido de ley de potencias con un $n = 0.5$, la forma del frente de flujo es muy cercana a la de un semicírculo.

En 1987, Coyle *et al.* [3] elaboraron un experimento para estudiar el efecto de flujo fuente. Dicho experimento consistía de un ducto rectangular que se movía a una velocidad constante y un émbolo que

permanecía estacionario. La cinemática del flujo fuente se estudiaba usando trazadores. Simularon el problema utilizando un esquema de Galerkin de elementos finitos, obteniendo una buena congruencia entre los resultados numéricos y experimentales. Debido a la forma en que se dispuso el experimento, los efectos gravitacionales debían incluirse en el análisis. Como resultado, se predijo un frente de flujo con tendencia a aplanarse.

Mavridis *et al.* [5], en 1988, analizaron el efecto de flujo fuente considerando efectos viscoelásticos, obteniendo una buena correspondencia entre los resultados numéricos y patrones de birrefringencia obtenidos experimentalmente. En 1990, Vroonhoven [8] desarrolló una solución analítica para el caso Newtoniano resolviendo el problema de Hilbert usando un mapeo conforme en un plano complejo. En 2005, Gramberg [9] estudió el problema de inestabilidades térmicas inducidas, obteniendo un modelo analítico para este fenómeno.

Otro autor con contribuciones importantes en la simulación del efecto de flujo fuente es Mitsoulis, quien desarrolló soluciones para fluidos pseudoplásticos, viscoplásticos [10] y viscoelásticos [11]. Usando el método de elementos finitos, Mitsoulis simuló el efecto de flujo fuente para fluidos de ley de potencias con un índice de 0.26, demostrando que la suposición de tener un frente semicircular no es válida para bajos valores de n .

La simulación del efecto de flujo fuente representa un desafío por dos razones: la existencia de una singularidad en el campo de presión en el punto de contacto entre la pared y el frente de flujo, y la existencia de una superficie libre, en donde la forma del frente de flujo se desconoce requiriéndose métodos iterativos para su definición.

Para solucionar un problema de frontera libre con métodos basados en malla, se usan métodos Euleriano, Lagrangianos y Lagrangianos-Euleriano adaptativos. En los métodos Eulerianos, la malla cubre tanto las regiones del líquido como del aire y permanece fija durante el proceso iterativo, y la superficie libre se ubica dentro de dicha malla, permitiendo resolver el problema sin la necesidad de recalcular la malla. Con este método se pierde precisión a la hora de determinar la forma final de la superficie [12]. En los métodos Lagrangianos, la malla se mueve con las partículas del fluido, lo que permite definir con precisión la forma de la superficie libre, haciendo más simple la imposición

de las condiciones de frontera. Sin embargo, estos métodos requieren la incorporación de algoritmos de re-enmallado cuando existen grandes deformaciones de la superficie, lo que hace que el método sea costoso desde el punto de vista computacional y complicado de implementar en geometrías tridimensionales [13]. La idea de los métodos Lagrangianos-Eulerianos adaptativos es combinar las ventajas de los métodos Lagrangianos y Eulerianos. La implementación de estos algoritmos puede llegar a ser de alta dificultad y requerir de variaciones dependiendo del caso estudiado [13].

Las superficies libres son un reto numérico debido a que la geometría del dominio no se conoce a la hora de formular el problema, llevando a la necesidad de calcular constantemente la forma del dominio y por lo tanto la discretización del mismo. La simulación de este tipo de problemas utilizando métodos convencionales basados en mallas presenta dificultades relacionadas con la deformación y el recalcado de la malla, perdiendo precisión por la alta deformación de los elementos, tanto cuando se usa el método de elementos finitos [11] como el de volúmenes finitos [14]. Un método ampliamente utilizado en problemas de superficies libres es el de elementos de frontera. Sin embargo, este método tiene la limitación de no poder involucrar adecuadamente el comportamiento no lineal de los polímeros [15]. Los avances realizados sobre los métodos sin malla, los hace candidatos prometedores para resolver este tipo de problemas [16; 17; 18]

Los métodos sin malla utilizan puntos dispersos en el dominio de solución y la frontera, en donde la solución se aproxima usando la distancia entre puntos. Por lo anterior, no es necesario el recalcado de una malla en problemas con fronteras móviles, sino que es suficiente con la reubicación de puntos, haciéndolos altamente eficientes en estas aplicaciones.

Los métodos sin malla se clasifican en dos grandes familias: métodos de formulación débil [19; 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27] y métodos de formulación fuerte. La mayoría de los métodos de formulación débil requieren una malla auxiliar para llevar a cabo la integración, perdiendo su atractivo original de ser libres de malla. Los métodos de formulación fuerte son realmente libres de malla e incluyen el método de vórtices [28], el método finito de puntos [29] y las colocaciones con funciones de base radial y sus

variaciones [30; 31; 32; 33; 34; 35]. El método de Funciones Radiales (MFR) en el cual se basa el presente trabajo, es un método de colocación, el cual tiene su origen en el trabajo de Kansa [30; 31]. Como lo reporta Zhang [36], el método de funciones radiales tiene la ventaja de ser realmente un método sin malla y de ser independiente a las dimensiones espaciales.

Sólo en los últimos diez años las aplicaciones de técnicas sin malla con funciones radiales se han extendido a la simulación de flujos no Newtonianos. En 2003, Er-Riani *et al.* [37] simularon el flujo Couette entre dos cilindros concéntricos de un fluido Bingham bajo torques impuestos. En 2005, Mai-Duy y Tarmer [38] calcularon flujos isotérmicos bidimensionales usando el método de funciones radiales indirectas. En 2007, Bernal y Kindelan [39] usaron el método de Kansa para modelar flujos isotérmicos usando la aproximación Hele-Shaw para la simulación de la inyección de un fluido de ley de potencias en una cavidad.

López ha presentado varias publicaciones sobre la utilización del método funciones radiales para modelar el flujo de polímeros. Entre estas publicaciones se encuentran la simulación de un reómetro de ranura para altas presiones en 2006 [40; 41], la simulación del proceso de calandrado en 2007 [42; 43], la simulación de llenado y predicción de temperatura en sistemas de colada caliente en 2008 y 2009 [44; 18], y la predicción de flujos secundarios en ductos no rectangulares por efectos viscoelásticos [18].

El presente trabajo, representa el primer esfuerzo de simular un problema de superficies libres en polímeros utilizando un método de colocación. En particular, se estudia el efecto de flujo fuente, el cual es de gran interés dentro de los análisis de flujo en los procesos de moldeo, y en la predicción de la calidad final de las partes moldeadas.

2. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

Para modelar el efecto de flujo fuente, se consideran las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento. En la formulación, se asume que el material es incompresible y que los efectos inerciales pueden ser despreciados debido a la alta viscosidad de los materiales poliméricos. Después de simplificar, las ecuaciones se pueden escribir como:

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \tag{1}$$

$$[\mathbf{0} = -\nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g}] \tag{2}$$

En el caso del moldeo por inyección, las fuerzas de cuerpo también pueden ser omitidas. Para la modelación del problema, se consideran las condiciones de frontera ilustradas en la Figura 1. Se consideran condiciones de no deslizamiento en las paredes. Para la condición de entrada de flujo ($y = 0$), se considera un perfil parabólico de velocidad. Las condiciones de frontera en el frente de flujo están dadas por [10],

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{3}$$

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{t} = 0 \tag{4}$$

donde \mathbf{t} y \mathbf{n} son los vectores tangencial y normal a la superficie y $\boldsymbol{\sigma}$, es el tensor total de esfuerzos, el cual incluye a la presión y al tensor de esfuerzos viscosos. Adicionalmente, si se considera un sistema de referencia que se mueve a la velocidad promedio del flujo, se debe tener en cuenta la siguiente condición:

$$(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}) = 0 \tag{5}$$

donde \mathbf{u}' es el vector velocidad correspondiente a cada uno de los puntos del frente de flujo. Esta condición cinemática no se impone como condición de frontera dentro del modelo numérico, sino que debe asegurarse por medio de un proceso iterativo que da como resultado la forma final del frente de flujo. En este caso particular, se usa el mismo procedimiento utilizado por Mitsoulis [10], en el cual se comienza asumiendo una forma del frente de flujo completamente circular, se soluciona el campo de velocidades, y se corrige la forma del frente de flujo usando la siguiente expresión,

$$y_{new} = y_w + \int_{B/3}^x \frac{u_y - U_s}{u_x} dx \tag{6}$$

En donde y_{new} es la nueva posición del frente de flujo, B es el ancho de la ranura, y_w es la coordenada y del punto de contacto entre el frente de flujo y la pared, y U_s es la velocidad promedio del flujo. Con la nueva geometría, se soluciona nuevamente el campo de velocidades. El procedimiento se repite hasta que se logra garantizar la condición cinemática de la ecuación (5).

La implementación numérica para obtener la solución del campo de velocidades y presiones se basa en el Método de Funciones Radiales (MFR). Dicho método permite la aproximación de una variable, $f(x_i, y_i)$, en un medio continuo, por medio

de una combinación lineal de coeficientes de interpolación, α_j , y funciones de base radial (FBR), $\phi(r_{ij})$,

$$f(x_i, y_i) \approx \sum_{j=1}^N \phi(r_{ij}) \alpha_j \tag{7}$$

donde r_{ij} representa la distancia entre los nodos i y j , y N es el número de puntos de colocación. Se puede aproximar el resultado de aplicar un operador diferencial, \mathcal{L} , sobre dicha variable de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}[f(x_i, y_i)] \approx \sum_{j=1}^N \mathcal{L}[\phi(r_{ij})] \alpha_j \tag{8}$$

Lo anterior permite la representación de ecuaciones diferenciales parciales usando un método de colocación. El procedimiento detallado para la solución de las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad se encuentra en [18].

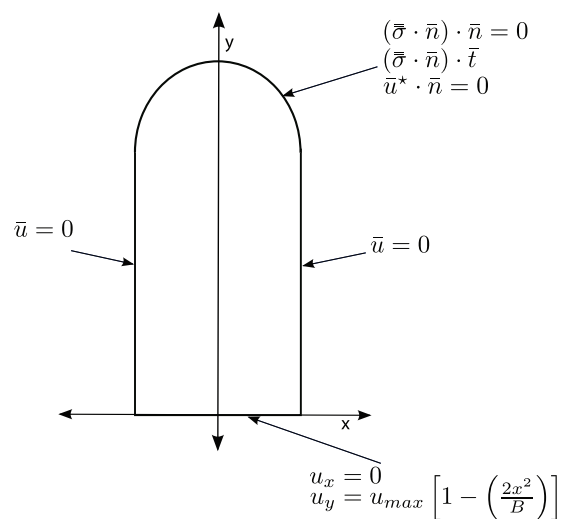


Figura 1. Geometría y condiciones de frontera

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1 Efecto de flujo fuente en una ranura con un fluido no Newtoniano modelado con la ley de potencias.

Muchos flujos de inyección pueden aproximarse a una ranura plana, debido a que las partes inyectadas normalmente presentan una gran relación de aspecto entre el ancho de la pieza y su espesor, permitiendo que el análisis se reduzca a una geometría bidimensional. Se consideró una ranura de espesor (B) de 2 mm, con una velocidad media a la entrada (\bar{u}) de 0.666 m/s.

La dependencia de la viscosidad con la velocidad de cizalladura se describe con el modelo de ley de potencias dado por:

$$\eta = k|\dot{\gamma}|^{n-1} \quad (9)$$

Para la simulación del efecto de flujo fuente, no se consideró un material polimérico en particular. Se impuso un rango de propiedades que cubre un importante espectro de materiales. Se asume una parámetro de consistencia, k , de 1000 Pa.sⁿ, e índices de ley de potencias, n , entre 1.1 y 0.6. Se impone como condición de entrada de flujo, la solución analítica de un flujo de presión a través de una ranura. En la Figura 2, se presenta la predicción del campo de velocidades resultante para un fluido Newtoniano usando el MFR. En dicha figura, se presenta la misma solución de velocidades usando dos sistemas de referencia distintos: uno que se mueve a la velocidad promedio del flujo (el observador “viaja” con el fluido) y uno fijo (el observador permanece estático). En la Figura 3, se comparan las líneas de flujo obtenidas con el MFR para un fluido Newtoniano con los resultados obtenidos por Huigol [45] usando el método de elementos finitos.

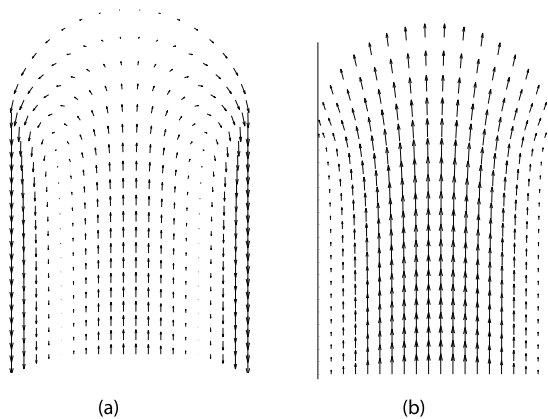


Figura 2. Predicción del campo de velocidades usando MFR con un sistema de referencia que se mueve a la velocidad promedio de flujo (a) y un sistema de referencia fijo (b).

Mavridis [13] encontró que para $1.0 \geq n \geq 0.5$, la cinemática del flujo es muy similar a la del caso Newtoniano. Adicionalmente, encontró que en la medida en que n disminuye, el frente de flujo tiende a moverse hacia adelante, y es casi semicircular cuando $n = 0.5$. Esta misma tendencia se observa en los resultados del presente trabajo. En la literatura, es común definir una ubicación adimensional de la línea de centro en el frente de flujo como,

$$\chi = \frac{\Delta y_{cl}}{B/2} \quad (10)$$

donde Δy_{cl} es la diferencia en la coordenada y del punto ubicado en el frente de flujo en la línea de centro, y el punto en contacto con la pared, y B es el espesor de la ranura. En el presente trabajo, se obtuvo para el caso Newtoniano un valor de $\chi = 0.91$. En la literatura, dicho valor oscila entre 0.90 – 0.94 (Tabla 1). En la Figura 4, se muestra la posición adimensional de la línea de centro del frente de flujo como función del índice de ley de potencia. Los resultados obtenidos son congruentes con el trabajo de Mitsoulis [10].

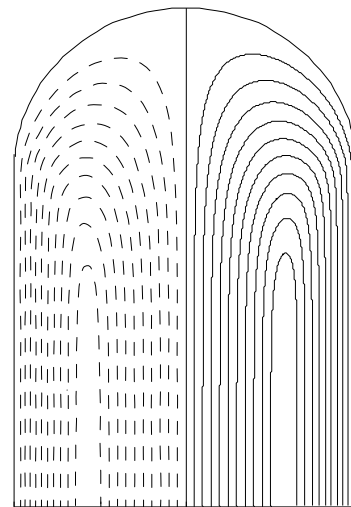


Figura 3. Comparación de las líneas de flujo obtenidas por Huigol usando FEM [45] (izquierda) y las obtenidas en el presente trabajo usando MFR (derecha) para un fluido Newtoniano.

Tabla 1. Predicción adimensional de la línea de centro en el frente de flujo para un fluido Newtoniano según lo reportado por Mitsoulis [11] para diferentes autores.

Investigator	Sistema de referencia	χ
Mavridis et al.	En movimiento	0.90
Coyle et al.	En movimiento	0.93
Behrens et al.	En movimiento	0.94
Behrens et al.	Fijo	0.91
Bogaerds	En movimiento	0.92
Mitsoulis	En movimiento	0.90
Presente trabajo	En movimiento	0.91

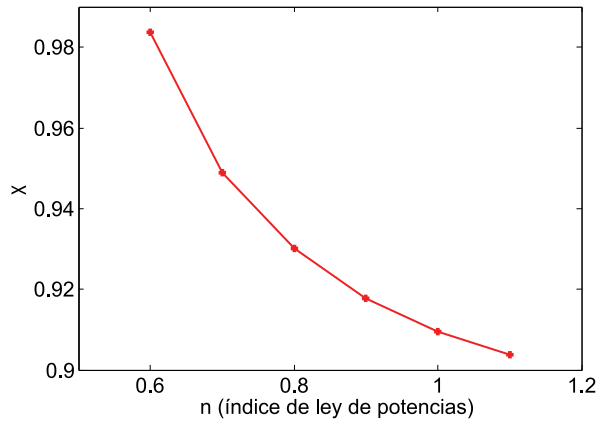


Figura 4. Posición adimensional del frente de flujo en función del índice de ley de potencias predicha utilizando el método de funciones radiales

3.2 Efecto de flujo fuente en tubo vertical para un fluido Newtoniano considerando fuerzas gravitacionales

La simulación del efecto de flujo fuente en un tubo vertical para un fluido Newtoniano se desarrolló para modelar el montaje experimental propuesto por Osswald y Al-Zain [46]. Dicho dispositivo consta de un cilindro transparente relleno de aceite de silicona y un émbolo estacionario (Figura 5). En la medida en que el cilindro se mueve hacia abajo, el efecto de flujo fuente se desarrolla en la superficie libre. En este experimento, la existencia de fuerzas de cuerpo derivadas de la gravedad no puede ser ignorada debido a que la viscosidad del fluido es relativamente baja y a la disposición vertical del montaje.

En este experimento, la altura de la columna de silicona es tres veces el diámetro del cilindro, en donde el diámetro es de 95.25 mm. El cilindro se mueve a una velocidad de 0.05 m/s y la viscosidad del aceite es de 3Pa·s. Para el proceso iterativo, se asumió que el frente de flujo era completamente plano, y se comenzó a iterar la forma hasta cumplir con la condición de frontera cinemática. El campo de velocidades resultante se presenta en la Figura 6.

Mitsoulis [10] predice un valor de $\chi = 0.84$ para un flujo a través de un tubo circular de un fluido Newtoniano, cuando se desprecian los efectos gravitacionales. En el presente trabajo, al incluir la gravedad, se obtuvo un valor de 0.64. Del resultado anterior, se concluye que la gravedad afecta considerablemente la forma del frente de flujo en sistemas donde los esfuerzos viscosos son bajos. Como resultado de considerar las fuerzas

gravitacionales, se aplana el frente de flujo, efecto que ha sido reportado por otros investigadores [3].

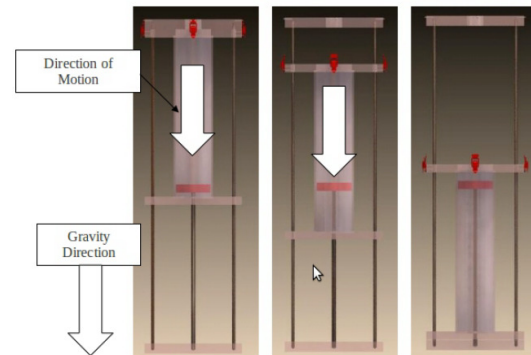


Figura 5. Montaje experimental desarrollado para estudiar el efecto de flujo fuente [46].

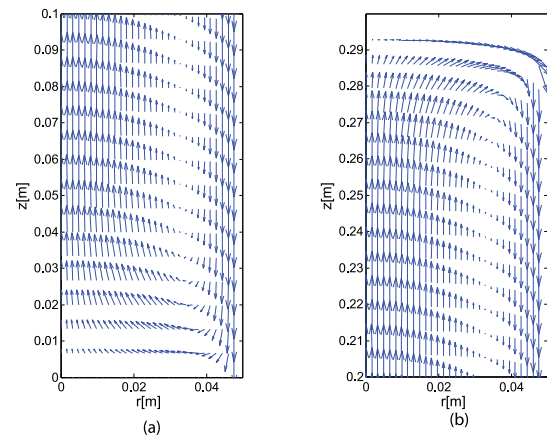


Figura 6. Campo de velocidad del flujo fuente predicho usando MFR en un cilindro vertical para un fluido Newtoniano considerando fuerzas gravitacionales. Se presentan los resultados en la zona inferior del cilindro (a) y en el frente de flujo (b).

4. CONCLUSIONES

Se desarrolló un modelo computacional para simular el efecto de flujo fuente en una ranura plana usando un método libre de malla, el método de funciones radiales, considerando índices de ley de potencias que varían entre $1.1 \geq n \geq 0.6$. Los resultados obtenidos están en concordancia con valores obtenidos en la literatura usando el método de elementos finitos. En la actualidad, estos resultados están siendo utilizados para predecir el comportamiento de la orientación de fibras en sistemas reforzados, y para estimar el efecto del flujo fuente en la historia térmica de la parte inyectada. Adicionalmente, se consideró el caso Newtoniano en una geometría tubular considerando

efectos gravitacionales. De esta simulación se concluye que la gravedad genera que la forma del frente de flujo tienda a aplanarse en flujos verticales ascendentes donde las fuerzas viscosas son relativamente bajas.

5. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Universidad EAFIT por los recursos suministrados para facilitar la presente investigación.

6. REFERENCIAS

- [1]. Osswald, T. y G., Menges. *Materials science of polymers for engineers*. Munich : Hanser, 2003.
- [2]. Behrens, R. A., et al. Transient free-surface flows: motion of a fluid advancing in a tube. *AIChe Journal*. 1987, Vol. 33 (7), pp. 1178-1186.
- [3]. Coyle, D. J., Blake, J. W. y Macosko, C. W. The kinematics of fountain flow in mold filling. *AIChe Journal*. 1987, Vol. 33(7), pp. 1168-1177.
- [4]. Mavridis, H., Hrymak, A. y Vlachopoulos, J. Deformation and orientation of fluid elements behind an advancing front. *Journal of Rheology*. 1986, Vol. 30(6), pp. 555-563.
- [5]. Mavridis, H., Hrymak, A. y Vlachopoulos, J. The effect of fountain flow on molecular orientation in injection molding. *Journal of Rheology*. 1988, Vol. 32, pp. 639-663.
- [6]. Mavridis, H., Hrymak, A. y Vlachopoulos, J. Finite element simulation of fountain flow in injection molding. *Polymer Engineering and Science*. 1986, Vol. 26 (7), pp. 449-454.
- [7]. Mavridis, H., Hrymak, A. y Vlachopoulos, J. Transient free-surface flow in injection molding. *AIChe Journal*. 1988, Vol. 34 (3), pp. 403-410.
- [8]. vanVroonhoven, J.C.W. y Kuijpers, W.J.J. A free boundary problem for viscous fluid flow in injection molding. *Journal of Engineering Mathematics*. 1990, Vol. 24 (2), pp. 151-165.
- [9]. Gramberg, J. *Flow Front Instabilities in a Injection Moulding Process*. PhD Dissertation. Technische Universiteit Eindhoven. 2005.
- [10]. Mitsoulis, E. Fountain flow of pseudoplastic and viscoplastic fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2010, Vol. 165, pp. 45-55.
- [11]. Mitsoulis, E. Effect of viscoelasticity in fountain flow of polyethylene melts. *International Polymer Processing*. 2009, Vol. 5, pp. 439-451.
- [12]. Li, X., et al. Adaptive coupled arbitrary lagrangian-eulerian finite element and meshfree method for injection molding process. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2008, Vol. 73 (8), pp. 1153-1180.
- [13]. Khayat, R.E. y Genouvrier, D. An adaptive lagrangian boundary element approach for three-dimensional transient free-surface stokes flow as applied to extrusion, thermoforming, and rheometry. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2001, Vol. 36(1), pp. 1-33.
- [14]. Emdadi, A., et al. Stable PDE solution methods for large multiquadric shape parameters. *Computer Modeling In Engineering & Sciences*. 25(1):23 – 41, 2008.
- [15]. Osswald, T., et al. chapter 11: Radial Function Method. *Polymer Processing Modeling and Simulation*. s.l. : Hanser, 2006.
- [16]. Liu, G. R. y Gu, G. U. *An introduction to meshfree methods and their programming*. s.l. : Springer, 2005.
- [17]. López, I. D., Estrada, O. y Osswald, T. Modeling and simulation of polymer processing using the radial functions method. *Wak Zeitschrift Kunststofftechnik*. 2007.
- [18]. López, I.D. Modeling of polymer processing using the radial function method (RFM). PhD thesis, University of Wisconsin Madison. 2009.
- [19]. Nayroles, B., Touzot, G. y Villon., P. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*. 10(5):307 – 318, 1992.
- [20]. Belytschko, T., Lu, Y.Y. y Gu., L. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 37(2):229 – 256, 1994.
- [21]. Wang, J. G. y Liu., G. R. A point interpolation meshless method based on radial basis functions. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*. 54(N 0029-5981):1623 – 1648, 2002.
- [22]. Liu, Wing Kam y Jun, Sukky. Multiple-scale reproducing kernel particle methods for large deformation problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 41(7):1339 – 1362, 1998.
- [23]. Atluri, S.N. y Zhu, T. New meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*. 22(2):117 – 127, 1998.
- [24]. Chati, Mandar K., Mukherjee, Subrata y Mukherjee, Yu X. Boundary node method for three-dimensional linear elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 46(8):1163 – 1184, 1999.
- [25]. Gu, Y.T. y Liu., G.R. A boundary point interpolation method for stress analysis of solids. *Computational Mechanics*. 28(1):47 – 54, 2001.

- [26]. Liszka, T.J., Duarte, C.A.M. y Tworzydło., W.W. hp-meshless cloud method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 139(1-4):263 – 288, 1996.
- [27]. Babuska, I. y Melenk, J. M. Partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 40(4):727 – 758, 1997.
- [28]. Chorin., A. J. Numerical study of slightly viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics* . 57(4):785–796, 1973.
- [29]. Onate, E., et al. A finite point method in computational mechanics. applications to convective transport and fluid flow. . *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 39(22):3839 – 66, 1996.
- [30]. Kansa, E. J. Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics .1. *Computers & Mathematics With Applications*. 19(8-9):127 – 145, 1990.
- [31]. Kansa, E. J. Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics .2. solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial-differential equations. . *Computers & Mathematics With Applications*. 19(8-9):147, 1990.
- [32]. Fasshauer, G. E. Solving partial differential equation by collocation with radial basis functions. In *Proceeding of Chamonix*. 1997.
- [33]. Mai-Duy, N. y Tran-Cong, T. Indirect RBFN method with thin plate splines for numerical solution of differential equations. *Cmes-Computer Modeling In Engineering & Sciences*. 4(1):85 – 102, 2003.
- [34]. Fedoseyev, A. L., Friedman, M. J. y Kansa., E. J. Improved multiquadric method for elliptic partial differential equations via PDE collocation on the boundary. *Computers & Mathematics With Applications*. 43(3-5):439 – 455, 2002.
- [35]. Sarler, B., Tran-Cong, T. y Chen., C. S. Meshfree direct and indirect local radial basis function collocation formulations for transport phenomena. 2005.
- [36]. Zhang, X., et al. Meshless methods based on collocation with radial basis functions. *Computational Mechanics*. 26(4):333 – 343, 2000.
- [37]. Er-Riani, M., et al. Multiquadrics method for Couette flow of a yield-stress fluid under imposed torques. *International Workshop on MeshFree Methods Proceedings*. 2003.
- [38]. Mai-Duy, N. y Tarmer, R. I. Computing non-Newtonian fluid flow with radial basis function networks. *International Journal For Numerical Methods In Fluids*. 48(N 0271-2091):1309 – 1336, 2005.
- [39]. Bernal, F. y Kindelan., M. RBF meshless modeling of non-Newtonian Hele-Shaw flow. *Engineering Analysis With Boundary Elements*. 31(0955-7997):863 – 874, 2007.
- [40]. Klaiber, F., et al. Development of a high-pressure slit rheometer. ANTEC, Annual Technical Conference Proceedings. 2006.
- [41]. López, I. D., Klaiber, F. y Osswald, T. Analysis of viscous heating effect in a pressure slit rheometer using the radial functions method (RFM). ANTEC, Annual Technical Conference Proceedings. 2006.
- [42]. López, I. D. y Osswald, T. Modeling and simulation of polymer processing using the radial functions method. *The Polymer Processing Society 23rd Annual Meeting, Proceedings*. 2007.
- [43]. López, I. D., Estrada, O. y Osswald, T. Modeling and simulation of polymer processing using the radial functions method. *Wak Zeitschrift Kunststofftechnik*. 2007.
- [44]. López, I. D., et al. Filling simulation and temperature prediction in hot runner systems. ANTEC, Annual Technical Conference Proceedings. 2008.
- [45]. Huilgol, R. y You, Z. On the importance of the pressure dependence of viscosity in steady non-isothermal shearing flows of compressible and incompressible fluids and in the isothermal fountain flow. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2006, Vol. 136, pp. 106-117.
- [46]. Al-Zain, H. Effect of Fountain Flow on Fiber-Matrix Separation in Fiber Reinforced Injection Molded Parts. PhD thesis, University of Wisconsin Madison. 2010.