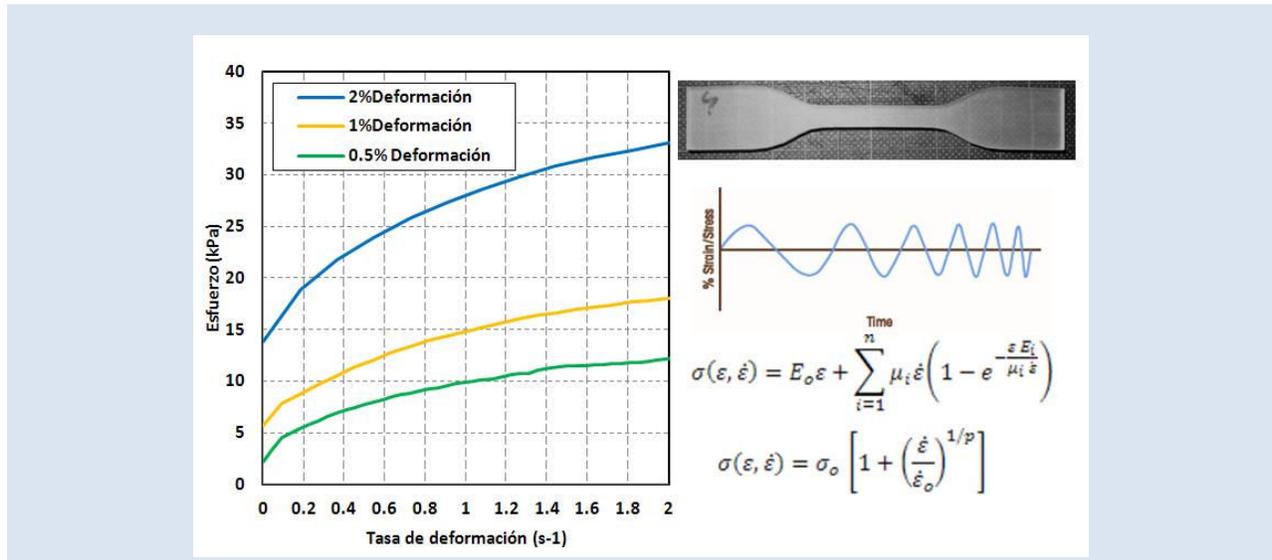


COMPARACIÓN DE MODELOS DINÁMICOS DEL COMPORTAMIENTO DE UN MATERIAL ELASTOMÉRICO BAJO TASAS DE DEFORMACIÓN MEDIAS

Andrés Felipe Ramírez, Luis Ernesto Muñoz*

Universidad de los Andes, Cra 1 N° 18A- 12 Bogotá, Colombia.

* e-mail: lui-muno@uniandes.edu.co



RESUMEN

El presente trabajo estudia dos modelos dinámicos del comportamiento de un material elastomérico cuando se somete a tasas de deformación medias. Los modelos a estudiar fueron los modelos constitutivos de *Maxwell* y *Cowper & Symonds*. Se realizó una comparación analítica entre los dos modelos. Se tomaron resultados de pruebas de caracterización dinámica de materiales y se identificaron los parámetros de cada modelo mediante un proceso de identificación multi-variable. Se estudió el nivel de representatividad obtenido en los dos casos, analizando los resultados de la identificación multi-variable.

Palabras Claves: Caracterización dinámica de materiales, tasas de deformación medias.

COMPARISON OF AN ELASTOMERIC MATERIAL BEHAVIOR’S DYNAMIC MODELS UNDER INTERMEDIATE STRAIN RATES

ABSTRACT

This paper studies two dynamic models of an elastomeric material behavior when it is subjected to intermediate strain rates. The studied models were the constitutive *Maxwell* model and the constitutive *Cowper & Symonds* model. An analytical comparison of each model was performed. Test results were taken from a dynamic material’s characterization and the parameters of each model were identified through a process of multi-variable identification. The level of representation obtained in both cases was studied, in order to analyze the analytical comparison with the results of the multi-variable identification.

Keywords: Dynamic material’s characterization, intermediate strain rates.

1. INTRODUCCIÓN

La funcionalidad de un sistema mecánico está asociada a sus propiedades inerciales, elásticas y disipativas. Las propiedades inerciales de dicho sistema están dadas por los cuerpos rígidos del mismo, mientras que las propiedades elásticas y disipativas lo están por los cuerpos deformables del sistema. Típicamente, los elementos deformables de un sistema son los elementos conectores, de montaje o sujeción. Con el fin de cumplir la función de transmitir o aislar movimiento, se combinan las propiedades de dos materiales diferentes, comúnmente elastómero y metal.

El análisis de sistemas mecánicos que contienen componentes elastoméricos requiere determinar modelos que reflejen el comportamiento de los componentes para obtener predicciones precisas del comportamiento dinámico de dichos sistemas mecánicos [1]. Dichos modelos pueden contener relaciones no lineales entre la fuerza y el desplazamiento, y efectos del material visco-elástico involucrado [2,3], o las relaciones entre la fuerza, desplazamiento y frecuencia de operación [4]. Este trabajo se concentra en comparar dos modelos constitutivos que reflejen el comportamiento dinámico de un material elastomérico previamente caracterizado dinámicamente. Dicha caracterización fue realizada mediante análisis dinámico mecánico, como el realizado por Ramírez y Muñoz [5]. Los modelos estudiados fueron: un modelo semi-físico de visco-elasticidad (modelo generalizado de *Maxwell*) y un modelo matemático no lineal empírico (*Cowper & Symonds*). Se realizó una comparación analítica entre los dos modelos. Se tomaron los resultados de la caracterización mediante DMA del material elastomérico, determinando los parámetros de cada modelo mediante un proceso de identificación multi-variable. Por último se realizó un análisis de sensibilidad de cada modelo considerando los parámetros involucrados en cada caso.

2. RESPUESTA DINÁMICA DE UN MATERIAL ELASTOMÉRICO

La respuesta dinámica de un material elastomérico presenta dos características principales: Endurecimiento por carga dinámica y ablandamiento por temperatura [6]. Una forma de clasificar el efecto de endurecimiento por carga dinámica es mediante la tasa de deformación ($d\epsilon/dt$)

a la cual está expuesto el material. La Tabla 1 muestra una clasificación de fenómenos mecánicos basada en la tasa de deformación. Adicionalmente se ha observado que en fenómenos con $\dot{\epsilon} < 5 \text{ s}^{-1}$ las fuerzas inerciales son despreciables [6].

Tabla 1. Clasificación dinámica de fenómenos mediante la tasa de deformación [6].

Fenómeno	Tasa de deformación (s^{-1})
Relajación de esfuerzos	$<10^{-5}$
Cuasi estático	$10^{-5}-10^{-1}$
Velocidades medias	$10^{-1}-10^3$
Alta dinámica	10^3-10^5
Alta velocidad de impacto	$>10^5$

La respuesta de un material expuesto a cargas dinámicas se puede describir por medio de una ecuación constitutiva que relaciona el esfuerzo mediante una función de la deformación, la tasa de deformación, la temperatura [6], y en algunos casos la historia de deformación del material, como se muestra en la Ecuación 1.

$$\sigma = g(\epsilon, \dot{\epsilon}, T, \text{historia de deformación}) \quad (1)$$

Donde σ es el esfuerzo, ϵ es la deformación, $\dot{\epsilon}$ es la tasa de deformación, y T es la temperatura.

En ciertos casos es posible desacoplar multiplicativamente el efecto de cada variable [7], como se muestra en la Ecuación 2.

$$\sigma = g_1(\epsilon)g_2(\dot{\epsilon})g_3(T)g_4(\text{historia de deformación}) \quad (2)$$

Este proyecto se centra en la comparación de dos modelos que predicen el comportamiento de un material elastomérico frente a la tasa de deformación, g_2 , para diferentes deformaciones fijas, dejando como parámetros constantes la influencia de la temperatura y la historia de deformación del mismo. Para ello, se tomaron caracterizaciones dinámicas mediante DMA.

3. CARACTERIZACIÓN DINÁMICA MEDIANTE DMA

La caracterización dinámica mediante DMA fue realizada para un material elastomérico comercial, *TangoPlus-FullCure©930*, utilizado como material base para piezas de prototipado rápido. Las

propiedades mecánicas de dicho material se presentan en la Tabla 2.

En el trabajo presentado por Ramírez y Muñoz [5], se estudia la respuesta del material elastomérico mencionado, frente a diferentes temperaturas. Donde, para 35°C, la respuesta dinámica del material fue estudiada en un rango de tasas de deformación de 0 s⁻¹ a 2 s⁻¹, para deformaciones constantes de 0.5%, 1% y 2% de deformación (como se muestra en la Figura 1), mediante una máquina Q800 de la TA-Instruments.

La tasa de deformación máxima estudiada fue de 2s⁻¹, por lo cual el esfuerzo medio calculado desprecia las fuerzas inerciales de la probeta.

Tabla 2. Propiedades mecánicas, TangoPlus-FullCure©930 [8].

Propiedad	Valor
Esfuerzo a ruptura (MPa)	1.5
Módulo de elasticidad al 20% de deformación (MPa)	0.1
Módulo de elasticidad al 30% de deformación (MPa)	0.2
Módulo de elasticidad al 50% de deformación (MPa)	0.3
Elongación a ruptura (%)	218
Dureza (Shore A)	27

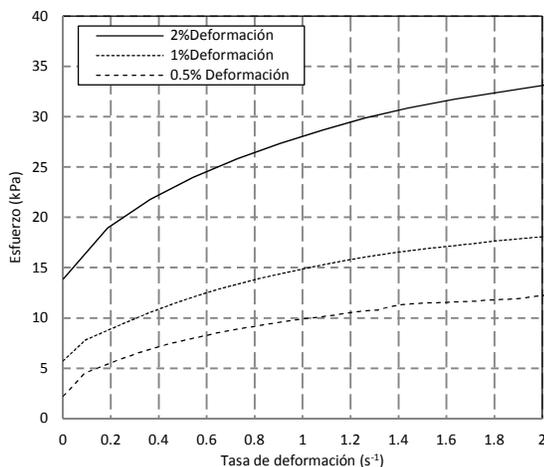


Figura 1. Caracterización dinámica de un elastómero a partir de DMA (Ramírez y Muñoz [5]).

4. COMPARACIÓN ANALÍTICA DE LOS MODELOS UTILIZADOS

El primer modelo es el modelo visco-elástico generalizado de Maxwell o modelo de Wiechert, el

cual combina paralelamente un grupo de resortes y amortiguadores en serie, que a su vez están en paralelo a un resorte, descrito por la Ecuación 3. Dicho modelo es un modelo semi-físico utilizado para caracterizar materiales visco-elásticos [9].

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = E_o \varepsilon + \sum_{i=1}^n \mu_i \dot{\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon E_i}{\mu_i \dot{\varepsilon}}} \right) \quad (3)$$

Donde E_o es el módulo de elasticidad del material elástico, E_i es el módulo de elasticidad del i-ésimo componente viscoelástico, μ_i es la viscosidad del i-ésimo componente viscoelástico, ε es la deformación, $\dot{\varepsilon}$ es la tasa de deformación y σ es el esfuerzo.

El segundo modelo utilizado es el modelo matemático empírico de Cowper & Symonds, representado en la Ecuación 4. Este modelo fue originalmente previsto como una ley de Creep para describir la respuesta visco-elástica de un material [7], pero después se ha observado que se puede utilizar para analizar fenómenos que ocurren a mayores tasas de deformación.

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \sigma_o \left[1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_o} \right)^{1/p} \right] \quad (4)$$

Donde σ_o es el esfuerzo inicial, $\dot{\varepsilon}_o$ es la tasa de deformación de referencia, y p el coeficiente de deformación del material. Debido a que las deformaciones estudiadas son de 0.5%, 1% y 2%, se puede tomar $\sigma_o = E_o \cdot \varepsilon$, donde E_o es el módulo de elasticidad. De esta forma se obtiene la expresión mostrada en la Ecuación 5.

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = E_o \varepsilon + E_o \varepsilon \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_o} \right)^{1/p} \quad (5)$$

Comparando la Ecuación 3 con la Ecuación 5 se puede ver cómo los dos modelos presentan una componente netamente elástica del esfuerzo ($E\varepsilon = \sigma_e$). Al reemplazar dicha componente en la Ecuación 3 y en la Ecuación 5, se obtienen las Ecuaciones 6 y 7 respectivamente.

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \sigma_e + \sum_{i=1}^n \mu_i \dot{\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon E_i}{\mu_i \dot{\varepsilon}}} \right) \quad (6)$$

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \sigma_e + \sigma_e \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_o} \right)^{1/p} \quad (7)$$

Donde σ_e es el esfuerzo netamente elástico descrito por $E\varepsilon$.

σ_e no depende de la tasa de deformación, por lo que es un esfuerzo puramente estático.

En el modelo generalizado de Maxwell, la componente dinámica del esfuerzo está descrita por la respuesta de los resortes y los amortiguadores en serie, dicho esfuerzo es independiente al esfuerzo estático, como se puede observar en la Ecuación 6. En cambio, para el modelo de Cowper & Symonds, el esfuerzo dinámico está dado por una corrección dinámica del esfuerzo estático, como se puede observar en la Ecuación 7.

5. IDENTIFICACIÓN MULTIVARIABLE

Para cada modelo se realizó una identificación multi-variable de los parámetros involucrados. La metodología utilizada tiene como finalidad minimizar el error absoluto de la función g_2 frente a los datos experimentales, y de esta forma encontrar los parámetros de cada modelo. La función de error planteada está descrita en la Ecuación 8.

$$E(p) = \sum_{i=1}^N (y_i - f(p, x_i))^2 \tag{8}$$

Donde y_i es el valor i-ésimo del esfuerzo experimental, x_i es el valor i-ésimo de la tasa de deformación experimental, f es una función constitutiva descrita por los parámetros tentativos p .

Se tomaron como referencia para la identificación multi-variable los valores obtenidos para 0.5% y 2% de deformación, y se tomaron los valores obtenidos para 1% de deformación como referencia para la medición del error.

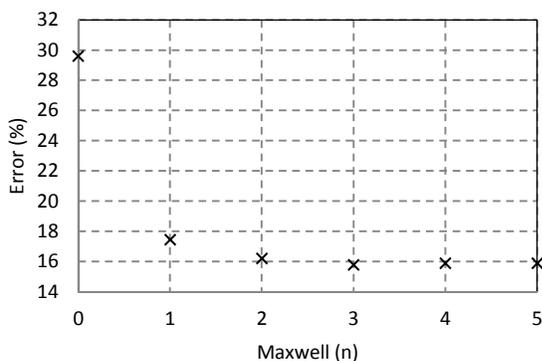


Figura 2. Error promedio del modelo generalizado de Maxwell para diferentes combinaciones de resortes y amortiguadores.

Tomando el modelo generalizado de Maxwell, se realizaron las identificaciones de los parámetros para diferentes números de combinaciones de

resortes y amortiguadores, desde N=0 hasta N=5. La Figura 2 presenta los resultados del error promedio calculado del modelo, donde se puede ver cómo el error promedio del modelo converge rápidamente al valor de 16%.

La Figura 3 presenta los resultados obtenidos tras la identificación de parámetros basada en los datos experimentales. Se muestran los resultados tanto para el modelo generalizado de Maxwell con N=5, como para el modelo de Cowper & Symonds.

El error presentado al usar el modelo generalizado de Maxwell es considerablemente alto debido a que el modelo no se ajusta bien a los datos experimentales de 1% de deformación. Por el contrario, la Figura 3b muestra cómo el modelo de Cowper & Symonds presenta un mejor ajuste a los datos de 1% de deformación, por lo cual el error promedio de dicho modelo es de 5.61%.

Este resultado no indica que el modelo de Cowper & Symonds es más preciso que el modelo generalizado de Maxwell, ya que al comparar los resultados obtenidos en la Figura 3, se puede observar cómo el modelo generalizado de Maxwell se ajusta mejor a los datos de 0.5% deformación y de 2% de deformación que el modelo de Cowper & Symonds; es decir que el modelo de Cowper & Symonds se ajusta mejor únicamente a los datos experimentales de 1% de deformación con respecto del modelo generalizado de Maxwell.

Las Tablas 3 y 4 presentan los parámetros obtenidos mediante la identificación multi-variable para el modelo generalizado de Maxwell y el modelo de Cowper & Symonds respectivamente.

El valor del módulo de elasticidad estático encontrado para el modelo generalizado de Maxwell es de 684.5 kPa, y para el modelo de Cowper & Symonds es de 659.8kPa. La diferencia entre los dos valores es de 24.7kPa. Este resultado coincide con lo visto en la comparación analítica de los dos modelos, debido a que los dos modelos presentan una componente estática similar. Este valor de módulo de elasticidad no es exactamente el mismo debido a que el la componente dinámica del modelo de Cowper & Symonds es dependiente de la componente estática, en cambio la componente dinámica del modelo generalizado de Maxwell es independiente de la componente estática.

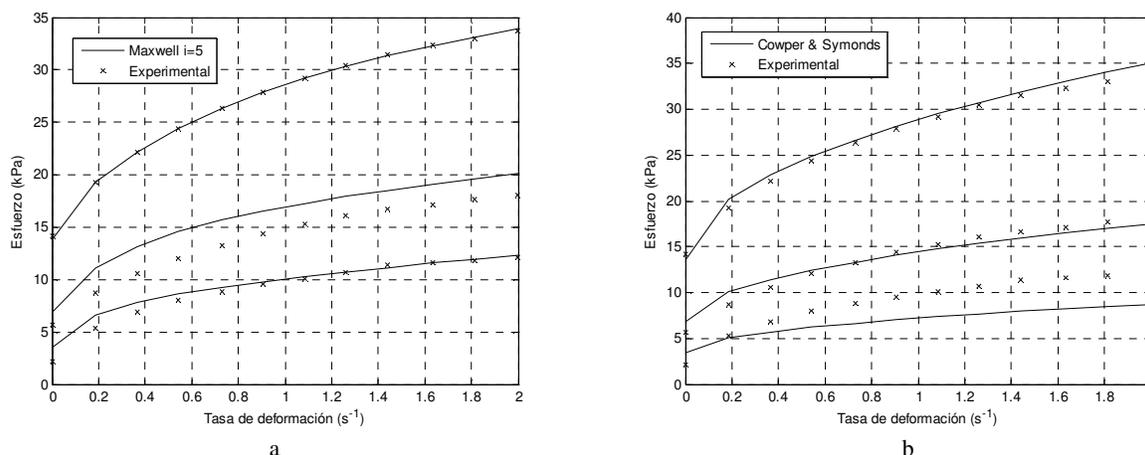


Figura 3. Comparación de los modelos frente a los datos experimentales: a) Modelo generalizado de *Maxwell*, b) modelo de *Cowper & Symonds*

Tabla 3. Parámetros encontrados para el modelo generalizado de *Maxwell* con $i=5$.

E_0 (kPa)	E_1 (kPa)	μ_1 (kPa.s)	E_2 (kPa)	μ_2 (kPa.s)	E_3 (kPa)	μ_3 (kPa.s)	E_4 (kPa)	μ_4 (kPa.s)	E_5 (kPa)	μ_5 (kPa.s)
684.5	0.9	1158.9	8.9	697.4	184.2	32.7	851.9	12.1	2738.8	2.1

Tabla 4. Parámetros encontrados para el modelo de *Cowper & Symonds*.

E_0 (kPa)	p	$\dot{\epsilon}_0$ (s ⁻¹)
659.8	2.087	0.698

6. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Por último, se realizó un análisis de sensibilidad con el fin de analizar cómo los parámetros identificados para cada modelo alteran la precisión de cada modelo frente a los datos experimentales.

Para la familia de modelos generalizados de *Maxwell* se tomó el modelo más sencillo que involucra un único término dinámico (un resorte en paralelo con un resorte y un amortiguador en serie, $i=1$), con el fin de simplificar el análisis. Se tomaron los tres parámetros involucrados (E_0, E_1, μ_1) variando cada uno dentro del intervalo comprendido entre $\pm 10\%$ respecto a su valor nominal, y se observó la variación del error absoluto del modelo frente al cambio de dichos parámetros, como se muestra en la Figura 5a. Los valores nominales de los parámetros encontrados mediante la identificación multi-variable fueron: $E_0 = 745.6$ kPa, $E_1 = 1409.7$ kPa, $\mu_1 = 15.7$ kPa.s.

Para el modelo de *Cowper & Symonds* se tomaron

los valores nominales encontrados mediante la identificación multi-variable de los tres parámetros involucrados ($E_0, p, \dot{\epsilon}_0$), variando cada uno dentro del intervalo comprendido entre $\pm 10\%$ respecto a su valor nominal. Los valores nominales encontrados mediante la identificación multi-variable se muestran en la Tabla 4.

La Figura 5a muestra cómo la variación del módulo elástico estático es la variación que afecta en mayor medida la precisión del modelo de *Maxwell*. La respuesta del modelo es menos sensible a la variación de sus parámetros dinámicos. La Figura 5b muestra cómo al igual que en el modelo generalizado de *Maxwell*, la respuesta del modelo de *Cowper & Symonds* es más sensible a la variación del valor del módulo de elasticidad estático. Cuantitativamente, al comparar las Figuras 5a y 5b, se puede ver cómo el modelo generalizado de *Maxwell* presenta una menor sensibilidad a la variación del módulo elástico que la presentada en el modelo de *Cowper & Symonds*.

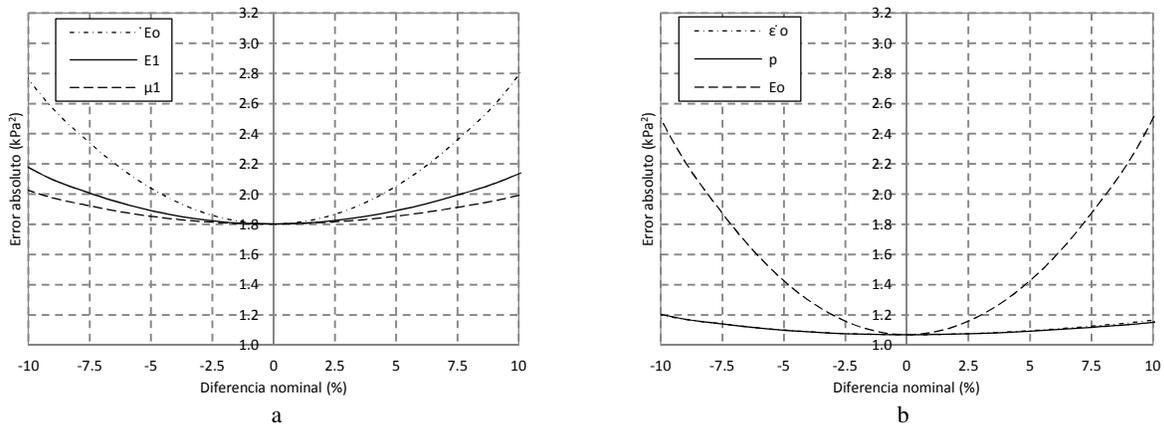


Figura 5. Comportamiento de la precisión del modelo frente a la variación de sus parámetros, a) Modelo generalizado de Maxwell, b) Modelo de Cowper & Symonds.

7. CONCLUSIONES

Se comparó la respuesta obtenida a partir del uso del modelo generalizado de Maxwell con la respuesta obtenida a partir del uso del Cowper & Symonds, cuyos parámetros se identificaron a partir de resultados experimentales. Se analizó la estructura de cada modelo, aislando la componente del esfuerzo estático de la parte dinámica. Al realizar la identificación multi-variable de cada uno se observaron las diferentes características de cada modelo frente a los resultados experimentales. El criterio de comparación de los modelos estudiados fue la confrontación de su respuesta frente a los datos experimentales a 1% de deformación de la caracterización dinámica, para dichos valores el modelo de Cowper & Symonds presentó un error promedio menor (5.6%) que el modelo generalizado de Maxwell (15.8%).

Los resultados del análisis de sensibilidad muestran que el modelo más sensible es el de Cowper & Symonds. Este modelo presentó una mayor sensibilidad a la variación de las propiedades estáticas (E_0) que a la de las dinámicas, donde al variar un 10% el módulo de elasticidad, el error absoluto aumenta alrededor de 1.3kPa^2 frente al valor nominal, mientras que al variar los parámetros dinámicos un 10%, el error absoluto aumenta menos de 0.1kPa^2 . Por otro lado el modelo generalizado de Maxwell, al igual que el modelo de Cowper & Symonds, es más sensible a la variación de las propiedades estáticas (E_0) que a la de las dinámicas, donde al variar 10% el módulo de elasticidad estático, el error absoluto aumenta casi 1kPa^2 frente al valor nominal, mientras que al variar los

parámetros dinámicos 10%, el error absoluto aumenta alrededor de 0.8kPa^2 frente al valor nominal.

8. REFERENCIAS

- [1]. Wineman, A et Al. A nonlinear viscoelastic model for one dimensional response of elastomeric bushings. *International Journal of Mechanical Sciences*, 40(12). 1998.
- [2]. Lee, S. B. & Wineman, A. A model for non-linear viscoelastic coupled mode response of an elastomeric bushing. *International Journal of NonLinear Mechanics*, 35, 2000.
- [3]. Bruni, S. & Collina. A. A. Modelling the viscoelastic behaviour of elastomeric components: an application to the simulation of train-track interaction. *Vehicle System Dynamics*, 34, 283-301, 2000.
- [4]. Ledesma, R et Al. A nonlinear viscoelastic bushing element in multibody dynamics. *Computational Mechanics*, 17, 287-296, 1996.
- [5]. Ramírez, A, Muñoz, L. Dynamic Characterization of an Elastomeric Component under Intermediate Strain Rates. *SAE Technical Paper*, 2012-01-0518, 2012, doi:10.4271/2012-01-0518.
- [6]. Meyers, M. *Dynamic behavior of materials*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
- [7]. Gobbi, M, Matinu, G, Muñoz, L, Pandolfi, A. Numerical-experimental analysis of metal bars undergoing intermediate strain rate impacts, *Comput Mech*, 2008.
- [8]. Objet. *Materials Data Sheets Tangoplus-FullCure@930*, 2009.
- [9]. Brinson, H. *Polymer engineering science and viscoelasticity: an introduction*, Springer, New York, 2008.