Saber, Universidad de Oriente, Venezuela. Vol. 28 Nº 4: 819-827. (2016)
ISSN: 2343-6468 Digital / Depósito Legal ppi 198702SU4231 ISSN: 1315-0162 Impreso / Depósito Legal pp 198702SU187

TRES ENFOQUES PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

THREE APPROACHES TO TEACH RATIONAL NUMBERS

ALFONSO GÓMEZ MULETT[1], ADRIANA PÉREZ SCHMALBACH[2]

[1]*Universidad de Cartagena, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Programa de Matemáticas,*
[2]*Colegio Naval de Manzanillo, Departamento de Matemáticas, Cartagena, Colombia*
E-mail: agomezm1@unicartagena.edu.co / adrilu09@hotmail.es

RESUMEN

El interés del presente trabajo está centrado en el análisis de los problemas de la enseñanza de los sistemas numéricos, en particular en el sistema de los números racionales que se aborda en el séptimo grado de la educación básica, de acuerdo con los enfoques parte-todo, operador y medida. Esta investigación se enmarca en la didáctica de la matemática, utilizando una metodología mixta combinando la ingeniería didáctica, el análisis de textos y la entrevista focalizada. Para lograr un acercamiento a la comprensión del concepto de número racional a partir de los tres enfoques mencionados, se exploraron las concepciones que sobre los números racionales tienen un grupo de docentes, y la forma como enseñan estos conceptos con la mediación de los textos escolares. Los resultados obtenidos mostraron que la enseñanza de los números racionales está influida por el conocimiento que tiene el profesor acerca de dichos números y los contenidos proporcionados por los textos.

PALABRAS CLAVE: Número racional, enfoque parte-todo, enfoque operador, enfoque medida, textos escolares.

ABSTRACT

The interest of this study is focused on the analysis of the problems in teaching numeric systems, particularly in the system of rational numbers as is taught in the seventh grade of elementary education, according to the approaches part-whole, operator and measurement. This study has as theoretical foundation the didactics of mathematics, using a mixed methodology that combines didactic engineering, text analyses and focused interviews. Seeking for an approximation to understand the concept of rational number from these three approaches, the conceptions were explored about rational numbers shared by a group of teachers and the way they teach these concepts through the mediation of textbooks. The results give evidence that the teaching of rational numbers is influenced by the knowledge that the teacher has about them and the content provided by textbooks.

KEY WORDS: Rational number, all-part approach, operator approach, measure approach, textbooks.

INTRODUCCIÓN

Los números racionales son utilizados desde la antigüedad, tal como lo muestra el papiro de Rhind, el documento más antiguo que existe de las matemáticas egipcias, donde aparecen operaciones aritméticas que incluyen números racionales como fracciones unitarias en problemas de medida y de reparto. En el antiguo Egipto se hacían cálculos utilizando fracciones con numerador uno y denominador un entero positivo, representadas con el jeroglífico de la boca abierta que representaba el número uno como numerador. Alrededor del año 1000 antes de nuestra era, los babilónicos utilizaban fracciones cuyo denominador era una potencia de 60, y los romanos trabajaban con fracciones cuyo denominador era 12.

Después de una larga evolución, pasando por las notaciones de Al Kashi, Stevin, Burgüi y Napier (Ruiz 2011), los números racionales se han expresado de dos formas diferentes, en forma de fracción, y con notación decimal. La escritura en forma de fracción tiene su origen en las relaciones entre la aritmética y la geometría (Aleksandrov *et al*. 1992); el uso particular de fracciones decimales y su utilización para la medida de magnitudes, como el tiempo, dieron lugar a la notación decimal (Centeno 1998). La representación de los números racionales en forma de fracción es la más usual en los libros de texto, de allí que la mayoría de los problemas en la enseñanza y aprendizaje de los racionales surgen en este aspecto, siendo el problema tan antiguo como dichos números.

Respecto a la problemática señalada existe una diversidad de investigaciones en los niveles de enseñanza primaria, secundaria y universitaria, y desde diferentes puntos de vista, donde esta problemática se expone junto con una aproximación a su solución; así por ejemplo, en los niveles educativos de enseñanza primaria y secundaria se pueden citar Fandiño (2009), Quispe y Gallardo (2009) y Howe *et al*. (2011); en el nivel universitario Mata y Porcel (2006), Aponte y García (2008); y desde diferentes enfoques es pertinente mencionar a Obando (2003), Lundberg (2011) y Lamon (2012) entre

Recibido: diciembre 2015.Aprobado: junio 2016.
Versión final: septiembre 2016.

otros; pero a pesar de ello el problema subsiste y parece desplazarse de un nivel educativo a otro, sin tenerse una fórmula mágica que ponga fin a las dificultades en el aprendizaje de los estudiantes cuando trabajan con números racionales.

Según Perera y Valdemoros (2009), las dificultades comienzan cuando el niño se enfrenta al estudio de las fracciones, sin tener los conocimientos previos necesarios y la insuficiencia de situaciones de la vida diaria donde se presentan problemas relacionados con los números racionales. Gairín y Muñoz (2005), en un estudio realizado sobre libros de textos para la enseñanza de los racionales en el nivel de educación secundario en España, afirman que el concepto de número racional queda opacado por el estudio de aspectos procedimentales, haciendo difícil la transferencia de este concepto a problemas de la vida diaria.

Para De León (1998), las dificultades en el aprendizaje de las fracciones se deben a la pobreza conceptual motivada por definir las fracciones a partir del fraccionamiento de la unidad, como un solo número, de allí que también se tengan dificultades para entender la equivalencia entre ellas, pues una fracción es una pareja de números (Maza 1999).

Quispe y Gallardo (2009), al investigar la comprensión del número racional positivo, encuentran que los estudiantes de secundaria tienen un conocimiento impreciso de número racional, consideran que los racionales están formados por cocientes de números enteros sin tener conciencia del porqué el denominador es diferente de cero.

Por otra parte, Pruzzo (2012) estudia los problemas en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones, comparando el aprendizaje esperado con el desempeño del estudiante en el nivel educativo secundario. Díaz (1998), Flores y Morcote (1999) y Quispe *et al*. (2010), coinciden en afirmar que algunos estudiantes presentan dificultades para comprender el concepto de número racional como un número formado por otros dos números; además de esto, es de amplio conocimiento que los textos escolares y las creencias de los profesores sobre la matemática repercuten en los procesos de enseñanza y aprendizaje, cuando los racionales se presentan de esta manera, determinando los contenidos del currículo de matemática.

En lo relacionado con la enseñanza de las fracciones, Malet (2010) las estudia desde lo fenomenológico, cuando estas se representan en la forma $\frac{a}{b}$ siendo a y b números naturales, incluyendo los enfoques parte todo, operador, representante de un punto de la recta numérica, cociente, razón para comparar dos medidas y probabilidad; también se propone enseñar las fracciones siguiendo los enfoques parte-todo, cociente, razón, operador y medida (Behr *et al*. 1993); no obstante, otros tienen en cuenta solamente los enfoques cociente, razón operador y medida (Kieren 1993), y algunos consideran los enfoques parte-todo, operador, cociente y medida (Gairín y Muñoz 2005); sin embargo, en este trabajo se tienen en cuenta los enfoques parte todo, operador y medida porque estos son los constructos más utilizados en la presentación de las fracciones en los libros de texto analizados.

Enfoque parte-todo

Es el significado manifestado al considerar la fracción $\frac{a}{b}$ como la relación existente entre dos cantidades específicas a y, donde b es el número de partes en las que se divide el todo o unidad presentado en forma discreta o continua, y a es el número de partes tomadas del todo. Se conviene entonces que el denominador de la fracción indica el número de partes en que está dividido dicho entero y el numerador las partes consideradas, haciéndose el paso de lo concreto a la representación matemática; así, la idea inicial de fracción consiste en dividir un todo en partes iguales o congruentes; ya sea discreto cuando involucra colecciones de objetos, o continuo si el todo es un segmento, un área o un volumen (Kieren 1980).

Para Freudenthal (1983), las fracciones se presentan en el enfoque parte-todo, si un todo ha sido o está siendo rajado, cortado, rebanado, roto, coloreado, en partes iguales, o si se experimenta, imagina, piensa, como si así fuera. Con respecto al todo, lo considera discreto o continuo, definido o indefinido y estructurado o carente de estructura. Enfocar las fracciones desde el punto de vista parte-todo es algo bastante limitado no solo fenomenológicamente sino también matemáticamente, pues este enfoque produce solo fracciones propias (Freudenthal 1983). Esta posición de Freudenthal es uno de los cuestionamientos a los procesos de enseñanza basados en parte-todo; sin embargo, al referirse a la relación parte-todo exhibe ejemplos didácticos para la enseñanza de las fracciones, sugiriendo tomar en cuenta las magnitudes de área y longitud como medios para visualizar las relaciones de equivalencia; además recomienda el uso de otros materiales como la balanza y el reloj para percibir las equivalencias en los pesos y tiempos respectivamente.

Kieren (1980) considera la relación parte-todo como un todo continuo o discreto subdividido en partes iguales, indicando como fundamental la relación que existe entre el todo y un número designado de partes. Esta relación parte-todo sirve de base para la construcción de los otros enfoques (Kieren 1983), constituyéndose en una representación importante ya que a través de ella se tiene en cuenta las dos características básicas de la unidad, simple y compuesta, y los dos tipos de magnitudes, discretas y continuas (Obando 2003).

Enfoque como operador

Hace actuar a la fracción como transformador o función de cambio de un determinado estado inicial; así, la fracción $\frac{a}{b}$ empleada como operador, es el número que modifica un valor particular n multiplicándolo por a y dividiéndolo por b. Con ésta idea, la fracción actúa a partir de un estado inicial transformándolo en un estado final, asociándose directamente a multiplicaciones y divisiones sucesivas, independiente del orden. En este sentido, se puede hablar de la fracción como expresando un orden de ejecución, que en al final de la transformación resulta ser indistinguible. Ejemplos de este uso de la fracción lo observamos en "los 3/5 de una clase son niños", o "el 20% de descuento". Nótese que en el segundo caso, el porcentaje también se asocia como operador, pues para hallar la cantidad a descontar será necesario multiplicar por 20 y dividir por 100. En general, de la fracción como operador se dice que actúa como reductor o ampliador proporcional del objeto sobre el que se aplica (Gairín y Sancho 2002), o ciertos monstruos imaginarios que achican o agrandan a las víctimas que se les acerquen (Vasco 1991).

Como operador, los números racionales son transformadores que alargan o recortan los segmentos, aumentan o disminuyen el número de ítems en un conjunto de objetos discretos, o toman una figura en el plano geométrico como un triángulo o un rectángulo, y convertirla en otra figura más pequeña o más grande con la misma forma; así por ejemplo, Freudenthal (1983), propone como modelo para el operador-razón la amplificación o reducción de una figura.

El papel de la fracción como operador es la de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto equivalente, esta transformación se puede pensar como la amplificación o la reducción de una figura geométrica en otra figura $\frac{a}{b}$ veces más grande ó $\frac{a}{b}$ veces más pequeña (Kieren1980); en este caso la fracción actúa sobre otro número, en lugar de una entidad con sentido autónomo, esto se explicita cuando se piden, por ejemplo, los 4/5 de 20 ó los 3/4 de 56, donde operativamente se multiplica el entero por el numerador y se divide el producto por el denominador.

Escolano y Gairín (2005) señalan que el significado de operador es el de una función racional de la forma $y = ax$ con a racional, que produce transformaciones en una cantidad de magnitud obteniéndose otra cantidad de esa misma magnitud medida con la misma unidad. La actuación del operador es la síntesis de dos operadores enteros, uno que multiplica, el numerador; y otro que divide, el denominador. Escolano y Gairín (2005) señalan que para que sea posible aplicar operaciones indicadas por la fracción, es necesario conocerlas y dicho conocimiento lleva consigo el indudable $a = \frac{m}{n}$ como ajuste que indica que m es el número por el que se multiplica y n el número por el que se divide (Elguero 2009). La composición de operadores que definen la acción de $\frac{m}{n}$ sobre la cantidad puede ser entendida como multiplicar por m y dividir entre n, o dividir entre n y multiplicar por m; de acuerdo con lo anotado, el número racional como operador le da un significado funcional a la preposición *de*, y justifica el significado de función, actuando sobre un número modificándolo.

Enfoque como medida

Tiene su origen en los *Elementos* de Euclides, luego en la práctica, al medir cantidades de magnitudes que siendo conmensurables no se corresponden con un múltiplo entero de la unidad de medida. La fracción $\frac{a}{b}$ resulta de dividir la unidad en b partes iguales y tomar solamente a partes de ella; así de esta manera, al decir la mitad de un tercio, se está describiendo una cantidad o un valor de magnitud por medio de otro.

La fracción como medida es reconocida por Kieren (1980) como la asignación de un número a una región o a una magnitud de una, dos o tres dimensiones, producto de la partición equitativa de una unidad. Una unidad de medida siempre puede dividirse en subunidades más y más finas de tal manera que puedes tomar una medida tan exacta como se requiera. En los números racionales como medida, el centro de atención está sobre la partición sucesiva de la unidad. Esta interpretación de la fracción como medida, se identifica con la enseñanza de la recta numérica, en la cual se muestra el número de partes iguales en que se puede dividir la unidad, pudiendo ésta partición variar dependiendo del número de particiones (Clarke y Roche 2009, Charalambous y Pitta-Pantazi 2005).

Un gran número de autores se han ocupado de la variedad de interpretaciones asociadas al concepto de número racional. De acuerdo con Elguero (2009), basándose en los trabajos de Escolano y Gairín (2005), se vislumbran cuatro significados asociados a este concepto, teniendo en cuenta la pluralidad de situaciones y contexto donde son utilizados: medida, cociente, razón y operador, y afirman que la concepción parte-todo está incluida en las situaciones señaladas, pues en cada contexto se identifican la unidad y sus partes correspondientes.

Respecto a las representaciones de los números racionales, se ha encontrado que las fracciones pueden representarse de manera geométrica, discreta, numérica y literal. Las representaciones geométricas se realizan en un contexto continuo y las más frecuentes son los diagramas circulares, rectangulares y la recta numérica. En las representaciones discretas la unidad está formada por un conjunto discreto de objetos. Las representaciones numéricas encuentran distintas formas de utilizar los números para indicar una relación parte-todo: representación como división indicada 3/5, representación como razón 3:5, representación decimal 0,6 y representación de porcentajes 60%. En las representaciones literales podemos distinguir distintas formas: tres quintos, tres de cinco y proporción de tres a cinco (Llinares y Sánchez 1996).

MATERIALES Y MÉTODOS

El estudio descrito se realizó utilizando una metodología mixta de tipo descriptiva, exploratoria y de análisis de textos siguiendo los dos primeros pasos de la ingeniería didáctica (Artigue *et al*. 1998), análisis preliminar y análisis a priori, aplicado a un grupo de ocho profesores a través de una entrevista mediante un cuestionario de cuatro preguntas, que sirvió de elemento para evaluar las distintas concepciones que tenían con respecto a los números racionales y la metodología empleada en su enseñanza. Es importante señalar que la entrevista se realizó sin previo aviso, con el fin de evitar que los docentes hubieran preparado sus respuestas, respondiendo así de acuerdo con sus concepciones ya establecidas, las que manejan a diario en sus clases con los estudiantes.

El análisis de los textos se realizó sobre tres de los textos de mayor demanda en la enseñanza de la matemática de grado siete, porque presentan los enfoques bajo estudio y además fueron utilizados como material bibliográfico en calidad de textos guías por los profesores encuestados; los textos son, Matemáticas 2: Aritmética y Geometría (Caro *et al*. 1983), Símbolos 7 (Rodríguez 2006) y Delta Matemáticas 7 (Estrada 2008). El análisis se concentró en el análisis conceptual como perspectiva didáctica, tal como lo proponen González y Sierra (2004), concibiendo los conceptos como componentes del pensamiento para entender procesos de construcción mediante la revisión de libros escolares (Rico 2013).

La muestra para la escogencia de los profesores fue subjetiva, por razones de interés para la investigación, estuvo conformada por un grupo de ocho docentes de enseñanza media en Cartagena, cuatro matemáticos y cuatro licenciados en educación área matemática seleccionados por la trayectoria laboral y académica al ser siempre evaluados como buenos profesores en los planteles donde trabajan, su disposición para la realización de la entrevista y porque representan las dos titulaciones de mayor incidencia en la colectividad de profesores.

La entrevista con los docentes se hizo con el propósito de constatar, si el concepto de número racional que tiene cada uno, es independiente de lo expuesto en los libros de texto que los profesores utilizaron en sus cursos; para ello, se formularon cuatro preguntas: ¿Qué es un número?, ¿Qué es un número racional?, ¿Cómo se construye el conjunto de los números racionales? y ¿Cómo se debe enseñar los números racionales en el séptimo grado?

El trabajo comprendió cuatro momentos. En el primero se hizo la aproximación al objeto de estudio mediante la exploración documental, que permitió conocer la historia de la conformación del concepto de número racional y la elaboración del marco teórico sobre los tres enfoques abordados, lo cual sirvió como orientación para los tres siguientes momentos. El segundo momento consistió en la aplicación de la entrevista al grupo de docentes que permitió indagar sobre sus concepciones y la manera como abordan el tema con sus estudiantes para analizar su influencia. El tercer momento fue la revisión de tres textos de séptimo grado con el fin de analizar el desarrollo que hacen de éste tema; finalmente en el cuarto momento se hace el análisis de los resultados derivándose de allí las conclusiones encaminadas a explicar la problemática existente.

Esta investigación se enmarcó en la didáctica de la matemática, haciéndose un acercamiento a la comprensión del concepto de número racional a partir de los enfoques parte todo, operador y medida, explorándose las concepciones que un grupo de docentes tiene sobre los números racionales y la forma como deben ser enseñados según su apreciación, apoyándose en los contenidos conceptuales de los libros de texto.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Respecto a los textos analizados, haciendo referencia a la presentación de los temas, los tres introducen los números racionales utilizando una representación gráfica con el enfoque parte todo, para lograr que el estudiante se familiarice con el tema; en particular, el texto Matemáticas 2: Aritmética y Geometría (Caro *et al*. 1983) es bastante didáctico, pues además de abarcar los tres enfoques estudiados en el presente trabajo, hace variados gráficos que le permiten al estudiante visualizar claramente la representación de los racionales y muestra situaciones variadas a través de problemas en sintonía con la propuesta de Freudenthal (1983), permitiendo darle aplicabilidad a éstos números justificada en su necesidad.

El texto Símbolos 7 (Rodríguez 2006), en el desarrollo de los contenidos omite fracciones equivalentes y fracciones irreducibles, aspecto bastante delicado porque son las fracciones equivalentes las que permiten explicar los números racionales a partir de las clases de equivalencia; finalmente se tiene el texto Delta Matemáticas 7 (Estrada 2008), el cual a partir de una estructura que da indicios de responder a la necesidad de una educación por competencias, presenta los números racionales con dos grandes falencias: no toma el enfoque parte-todo, el cual es la base de los demás enfoques y luego no aborda la ubicación de los números racionales en la recta, solamente habla de dichos números como representación de medidas en el contenido expuesto y en algunos de los problemas propuestos que inducen cálculos de acuerdo con lo expuesto por Escolano y Gairín (2005).

El texto Matemáticas 2: Aritmética y Geometría, empieza trabajando los números enteros y posiciona los números racionales en la segunda unidad con el siguiente orden de temas: fracciones y su notación, fracciones equivalentes, fracciones irreducibles, números racionales, adición de fracciones y propiedades, sustracción de racionales, ecuaciones aditivas, multiplicación de fracciones y propiedades, división de fracciones, ecuaciones multiplicativas, potenciación de números fraccionarios y propiedades, orden en los fraccionarios, densidad en los números racionales y ejercicios suplementarios sobre el tema**.** Este libro en su desarrollo, aborda las fracciones con la definición del conjunto: F = $\{ \frac{a}{b}$ / $a,b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ }, luego las representa por medio de figuras geométricas (cuadrados y rectángulos) divididos en partes iguales sombreando la fracción respectiva, es decir toma el enfoque parte-todo. Además los temas de fracciones equivalentes y adición de fracciones, los explica a través de la recta numérica exponiendo el enfoque de medida en una sola dimensión, omitiendo las otras dos representaciones señaladas por Kieren (1980), y lo mismo hace con la densidad de los números racionales, al poder ubicar siempre un racional entre otros dos. Las operaciones de multiplicación, división y potenciación se explican a través de sus respectivos algoritmos bajo el enfoque operador, sin ir al trasfondo de cada operación. Como se puede ver, no hay una correlación entre el sistema de los números racionales y su representación decimal y el enfoque de los racionales como operador solamente es presentado en el nivel operacional, tal como lo expresa Elguero (2009).

El texto Símbolos 7 hace énfasis en qué es matemática aplicada, empieza hablando de los estándares presentando ejercicios de pruebas saber; cada una de las unidades las relaciona con un tema particular de la vida cotidiana, por ejemplo, la unidad 4 es la reservada para los números racionales, la cual empieza con una lectura titulada *Comer para vivir* en la que muestra algunos valores nutricionales como números racionales, justificando su utilidad. La unidad está compuesta por los siguientes temas: concepto de número racional, adición y sustracción de números racionales, propiedades de la adición, potenciación y radicación, conversiones de decimales a racionales y viceversa y Ecuaciones. Este texto explica que los números racionales pueden ser expresados como fraccionarios o decimales, utiliza dibujos siguiendo el enfoque parte todo para correlacionar las fracciones, además de figuras rectangulares para las particiones; también recurre a la recta numérica para ubicación y comparación de fraccionarios en el enfoque medida, y para las operaciones básicas además de la explicación del algoritmo, presenta ejemplos gráficos y con diferentes elementos haciendo referencia a medidas de longitud, de capacidad y de tiempo en los problemas que presentan.

El texto Delta Matemáticas 7, ubica a los números racionales en la unidad 2 para la parte de representaciones y operaciones, y en la unidad

3 hace referencia de estos números como razones y proporciones, teniendo en cuenta los tres enfoques tratados en el presente trabajo; en la unidad 2 expone la misma temática del texto Matemáticas 2: Aritmética y Geometría. Al igual que en el texto Símbolos 7, Delta Matemáticas 7 redacta los estándares con los cuales se debe trabajar y hace referencia al empleo de estrategias para la resolución de problemas. La unidad de los números racionales comienza con la lectura *Cifras del cuerpo humano*, haciendo referencia a la cantidad de huesos del cuerpo humano, expresando luego con fracciones la proporción de una parte del cuerpo introduciendo así los números racionales. Posteriormente define el conjunto de los números racionales como el conjunto que permite realizar todas las divisiones todas las divisiones de números enteros en la forma $\mathbf{Q} = \{a/b: a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0\}$. Al explicar las fracciones equivalentes utiliza la recta numérica para representar que varias de estas corresponden a un mismo punto de la recta siendo un solo número racional, mostrando allí mismo la representación de los racionales en forma decimal.

En general, los textos intentan relacionar los números racionales con aspectos cotidianos, pero dedican la mayor parte de su exposición a las operaciones básicas de adición, multiplicación y potenciación, explican el algoritmo correspondiente de cada una de ellas, cayendo en la mecánica del cálculo, proceso importante para la resolución de ecuaciones, sin dar una correspondencia concreta del significado de las operaciones y de otras interpretaciones importantes desde lo epistemológico relacionadas con proporciones y porcentajes, afirmación coincidente con lo expresado en Llinares y Sánchez (1996).

El análisis de los textos muestra a Símbolos 7 como el más adecuado, ya que el hecho de representar gráficamente tanto las explicaciones como los problemas hace que el estudiante tenga una visualización más clara de la situación, adicionalmente los ejercicios y problemas hacen referencia a elementos del contexto de la vida diaria del estudiante, permitiéndole mayor aplicabilidad. También se puede evidenciar que el texto maneja los tres enfoques referidos en el presente trabajo: racionales como parte-todo, como operador y como medida.

En las entrevistas con los profesores se vislumbraron las siguientes concepciones. Respecto a la primera pregunta ¿Qué es un número?, seis profesores definen el número como un símbolo asociado a una cantidad o magnitud; los otros dos lo definen como un objeto matemático o un símbolo asociado a un elemento de un conjunto que hace parte de un sistema numérico. Para la segunda pregunta, ¿Qué es un número racional?, cinco profesores definen un número racional como el cociente entre dos enteros, un profesor lo define como una clase de equivalencia, otro afirma que el número racional es aquel cuya representación está dada por un fraccionario o un decimal, y un profesor lo identifica con los conceptos de razón y parte todo sin precisar la definición.

Con relación a la pregunta ¿Cómo se construyen los números racionales?, solamente dos profesores explican la construcción como clases de equivalencia obtenidas a partir de la relación $(a,b) \sim (c,d) \leftrightarrow ad = bc$ definida en el producto cartesiano ZxZ^*, donde Z son los números enteros y Z^* son los enteros sin incluir el cero, aquí las clases de equivalencia se corresponden con los números racionales; los demás profesores los construyen como cociente de dos números enteros, sin aclarar lo que ocurre cuando uno o ambos números del cociente son negativos y los representan como puntos en la recta real entre dos números enteros.

La última pregunta ¿Cómo se debe enseñar los números racionales en el séptimo grado? fue respondida en general, señalándose que la forma más apropiada para el nivel de enseñanza es presentar los números racionales como el cociente de dos enteros, pero al utilizarlos, cada racional se comporta como un operador, mientras que su representación corresponde al modelo parte todo considerando mecánicamente la ley de los signos cuando se trata de racionales negativos.

Las respuestas dadas a estas pregunta dejan como evidencia que no hay claridad de los profesores entrevistados acerca de cómo se construye el sistema de los números racionales; en la enseñanza de estos números, entremezclan los tres enfoques presentados en los textos, predominando el hecho de que un número racional es el cociente de dos enteros coincidiendo con la afirmación de Escolano y Gairín (2005), cuyo manejo se asemeja a un operador que multiplica y divide (Elguero 2009), pero su interpretación en el mundo real corresponde precisamente al enfoque parte todo.

CONCLUSIONES

En el momento en que los estudiantes experimentan que varias representaciones, por ejemplo, física, verbal, numérica, pictórica y gráfica de los números racionales se interrelacionan, su comprensión aumenta en la medida en que comprueban cómo están conectadas, pues es así como los estudiantes aprenden a comunicarse de diferentes maneras relacionando activamente materiales físicos, imágenes y diagramas con ideas matemáticas, a través de la práctica reflexionan sobre ellas y clarifican su propio pensamiento, estableciendo relaciones entre el lenguaje cotidiano con ideas y símbolos matemáticos, y también mediante las discusiones matemáticas que a diario se dan con sus compañeros dentro de las clases.

La representación de los números racionales como fracciones está influida por la objetivación emergente de la interacción social, presente por muchos años en el contexto sociocultural, así se evidencia también en otras investigaciones sobre el tema (Cisneros 2014), de allí que los textos enfaticen más sobre este aspecto y el concepto de número racional tenga una amplia representación mediante una fracción, hecho manifiesto en los docentes interrogados y que trasciende en otros escenarios donde los textos presentan la misma situación, que no cambia aún con las tareas asignadas a los estudiantes para la comprensión del concepto como lo muestra otra investigación sobre el tema (Victorio 2015).

Si se toman a los contextos (casos) como los que caracterizan el sentido (enfoques) con el que se usan las fracciones, es importante tener en cuenta que al referirse a la noción de número racional entendida desde el enfoque de medida, habrá que avanzar simultáneamente en la comprensión de los usos de los números racionales en situaciones y procesos de medición (de longitudes, capacidades, pesos y tiempo), permitiéndole utilizar instrumentos para establecer diferentes medidas.

De acuerdo con los resultados obtenidos, existen diferencias entre lo que es un número racional y la concepción de los profesores sobre los números racionales, la abstracción del concepto de número racional que pueda tener un profesor riñe con su práctica educativa, influida por los textos escolares, tal vez por adoptar una posición cómoda que en cierta forma le permite a los alumnos resolver sus inquietudes desde lo práctico, recurriendo a los tres enfoques expuestos. Así las cosas, el profesor resuelve también sus deficiencias conceptuales, enfatizando en sus clases la memorización, la mecanización de algoritmos y la rápida puesta en práctica de lo aprendido, yendo en la misma dirección de los textos escolares.

Finalmente, la enseñanza de los números racionales depende también de los problemas propuestos en los libros de texto analizados para ser resueltos por los estudiantes, los cuales enfatizan en la parte algorítmica, dejando de lado los diferentes contextos en los que se desarrolla la noción de número racional, estableciendo un puente muy débil entre la parte conceptual y las implicaciones que dicho concepto tiene en la vida diaria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEKSANDROV A, KOLMOGOROV A, LAURENTIEV M. 1992. La matemática: Su contenido, métodos y significado, 1. Madrid, Alianza Editorial, Madrid, España, pp. 425.

APONTE S, GARCÍA L. 2008. Las concepciones que poseen los estudiantes universitarios del número racional. Un acercamiento desde los estudiantes de primer semestre de Ingeniería de Sistemas. Universidad Cooperativa de Colombia, Sede Ibagué. Rev. Educación en Ingeniería. 3(5):80-90.

ARTIGUE M, DOUADY R, MORENO L. 1998. Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una empresa docente, Bogotá, Colombia, pp. 148.

BEHR M, HAREL G, POST T, LESH R. 1993. Rational numbers: toward a semantical analysis. Emphasis on the operador construct. *In*: CARPENTER T, FENNEMA E, ROMBERG E (Eds). Rational numbers an integration of research. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, New Jersey, USA, pp. 13-48.

CARO V, OBONAGA E, PÉREZ J. 1983. Matemáticas 2: Algebra y Geometría. PIME Ltda. Editores, Bogotá, Colombia, pp. 214.

CENTENO J. 1998. Números decimales ¿Por qué? ¿Para qué? Síntesis Editorial, Madrid, España, pp. 208.

CHARALAMBOUS C, PITTA-PANTAZI D. 2005. Revisiting a theoretical model on fractions: Implications for teaching and research. *In*: CHICK H, VINCENT J (Eds). Proceedings of the Twenty Ninth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME, Melbourne, Australia, pp. 233-240.

CISNEROS J. 2014. La objetivación del número racional a partir del proceso de medición. Medelín: Universidad de Antioquia [Tesis de Maestría], pp. 193. Disponible en línea en http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/handle/123456789/165. (Acceso 23.09.2015).

CLARKE D, ROCHE A. 2009. Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. Educ. Stud. Mathematics. 72:127-138.

DE LEÓN H. 1998. Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto. Relime. 1(2):5-28.

DÍAZ L. 1998. Reflexiones didácticas: en torno a fracciones, razones y proporciones. Grupos profesionales de trabajo. Ministerio de Educación, Santiago de Chile, Chile, pp. 66.

ELGUERO C. 2009. Construcción social de ideas en torno al número racional en un escenario sociocultural de trabajo. México: Instituto Politécnico Nacional [Tesis de Maestría], pp. 154. Disponible en línea en:http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/elguero_2009.pdf (Acceso 12.03.2015).

ESCOLANO R, GAIRÍN J. 2005. Modelos de medida para la enseñanza del número racional en educación primaria. Rev. Unión. 1(1):17-26.

ESTRADA W. 2008. Delta Matemáticas 7. Grupo editorial Norma, Cali, Colombia, pp. 323.

FANDIÑO M. 2009. Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. Editorial Magisterio, Bogotá, Colombia, pp. 148.

FLORES P, MORCOTE O. 1999. Algunos elementos del conocimiento profesional en la planeación de clases de futuros profesores de secundaria (un caso: las fracciones). Disponible en línea en: http://www.ugr.es/~pflores/textos/ARTICULOS/Investigacion/MorcoteFloresEMA.pdf (Acceso 10.02.2012)

FREUDENTHAL H. 1983. Didactical phenomenology of mathematical structures. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, pp. 599.

GAIRÍN J, MUÑOZ J. 2005. El número racional positivo en la práctica educativa: Estudio de una propuesta editorial. IX Simposio SEIEM. Disponible en línea en http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicaciónesgrupos/cd/grupos/grupopna/gairinmunoz.pdf (Acceso 28.04.2011)

GAIRÍN J, SANCHO J. 2002. Números y Algoritmos. Síntesis. Madrid, España, pp. 302.

GONZÁLEZ M, SIERRA M. 2004. Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. Enseñanza de las Ciencias. 22(3):389-408.

HOWE C, NUNES T, BRYANT P. 2011. Rational numbers and proportional reasoning: Using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. Int. J. Sci. Math. Educ. 9(2):391-417.

KIEREN T. 1980. The rational number constructs. Its elements and mechanisms. *In*: KIEREN T (Ed.), Recent Research on Number Learning. Eric/smeac, Columbus, New York, USA, pp. 125-149.

KIEREN T. 1983. Partitioning, equivalence and the construction of rational number ideas. *In*: CARPENTER T, FENNEMA E, ROMBERG E (Eds). Rational numbers an integration of research. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, New Jersey, USA, pp. 13-47.

KIEREN T. 1993. Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. *In*: CARPENTER T, FENNEMA E, ROMBERG, E (Eds). Rational numbers an integration of research. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, New Jersey, USA, pp. 49-84.

LAMON S. 2012. Teaching fractions and ratios for understanding: Esential content knowlwdge and instructional estartegies for teachers. Routledge, New York, USA, pp. 263.

LUNDBERG A. 2011. Proportion in mathematics textbooks in upper secondary school. *In*: PYTLAK M, ROWLAND T, SWOBODA E (Eds). Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. University of Rzeszów, Rzeszów, Poland, pp. 97-120.

LLINARES S, SÁNCHEZ V. 1996. Aprender a enseñar, modos de representación y número racional. Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de Primaria. *En*:

GIMÉNEZ J, LLINARES S, SÁNCHEZ V (Eds). El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la Educación matemática. Editorial Comares, Granada, España, pp. 97-120.

MALET O. 2010. Los significados de las fracciones. Mendomática. 21:1-18.

MATA L, PORCEL E. 2006. Análisis de los errores cometidos en el algoritmo de la suma de fracciones por ingresantes a la Fa.C.E.N.A. Disponible en línea en: http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt2006/09-Educacion/2006-D-018.pdf (Acceso 29.08.2015)

MAZA C. 1999. Equivalencia y orden: la enseñanza de la comparación de fracciones. Suma. 31:87-95.

OBANDO G. 2003. La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. Rev. EMA.8(2):157-182.

PERERA P, VALDEMOROS M. 2009. Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. Educación Matemática. 21(1):29-61.

PRUZZO V. 2012. Las fracciones: ¿Problema de aprendizaje o problemas de enseñanza? Pilquen. 14(8):1-14.

QUISPE W, GALLARDO J. 2009. Una aproximación a la comprensión de la fracción en Perú a través de los libros de texto. Investigación en Educación Matemática. 13(1):389-401.

QUISPE W, GALLARDO J, GONZÁLEZ J. 2010. ¿Qué comprensión de la fracción fomentan los libros de texto de matemáticas peruanos? PNA. 4(3):111-131.

RICO L. 2013. El método del análisis didáctico. Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática. 33:11-27.

RODRÍGUEZ C. 2006. Símbolos 7. Voluntad, Bogotá, Colombia, pp. 312.

RUIZ C. 2011. Sobre el origen de los números decimales. Universidad Nacional de Colombia. Disponible en línea en: http://carc1975.files.wordpress.com/2011/11/sobre-el-origen-de-los-nc3bameros-decimales.pdf (Acceso 13.05.2014).

VASCO C. 1991. EL archipiélago de las fracciones. Notas de Matemática y Estadística. 31(1):1-33.

VICTORIO S. 2015. Números racionales: razonamiento y demostración en libros de texto de matemática de secundaria de la educación básica regular del Perú. San Miguel: Pontificia Universidad Católica del Perú [Tesis de Maestría], pp. 98. Disponible en línea en: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/6612/VICTORIO_HURTADO_SAUL_NUMEROS_DEMOSTRACION.pdf?sequence=1&isAllowed=y (Acceso 12.03.2016).