UNA NOVEDOSA DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA FRACCIONARIA DE FOURIER Y SUS APLICACIONES

Martínez S., Héctor E.
(Recibido noviembre 2011, Aceptado febrero 2012)
Universidad Nacional Experimental de Guayana. Departamento de Ciencias y Tecnología. Área de Matemática.
Email: hmartine@uneg.edu.ve

Resumen: En este trabajo abordaremos el tópico de la transformada fraccionaria de Fourier continua desde el punto de vista del cálculo fraccionario, la cuál es una generalización de la transformada clásica de Fourier. Generalmente la transformada clásica de Fourier es la herramienta que es utilizada para resolver los modelos de ecuaciones diferenciales fraccionarios, esto a pesar de que se incurre en un error básico cuando se aplica la potencia reales o complejos que como bien es sabido no cumple la regla básica de tener una correspondencia biunívoca entre la función de partida y su transformada. Este fue nuestra motivación para introducir una nueva definición de la transformada fraccionaria de Fourier, la cual resuelve el problema que presenta la transformada de Fourier mencionado anteriormente. La definición de esta transformada está basada en la derivada fraccionaria la cuál es una generalización de la derivada ordinaria, para más detalles ver [6]. Además analizamos y desarrollamos las demostraciones de algunos teoremas relacionados con esta transformada así como también sus propiedades más importantes entre las cuales están la linealidad y la conmutatividad entre otras. Esta transformada mantiene sus propiedades frente a los operadores fraccionarios es decir son de una gran utilidad dentro de la rama de los modelos fraccionarios que no son locales, ella es muy importante en la modelización de la dinámica de procesos distorsionados sobre medios tortuosos. Por otra parte se describe un ejemplo de una ecuación diferencial fraccionaria ver [6] donde se aplica esta transformada para encontrar la solución de esta ecuación diferencial. Finalmente se expresan algunas aplicaciones interesantes basadas en modelos fraccionarios, entre los cuales están: Difusión anómala, fenómenos de transporte y superdifusión, entre otros.

Palabras clave*:* Derivada Fraccionaria/ Transformada Fraccionaria de Fourier (FRFT).

A NOVEL DEFINITION OF THE FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM AND ITS APPLICATION

Abstract: On this work we try the subject of the fractional Fourier transform from vanishing point of the fractional calculus. This integral transform is a generalization of the classical Fourier transform. In general the Fourier transform is used to solve fractional differential equation , it without take account that became one basic error when we applied the real o complex power since it is not keep the rule of the correspondence biunivocal between the function and its transform of Fourier. It argument expressed above was our motivation to defined a novel definition of the fractional Fourier transform, which to solved this problem that has the Fourier transform. It definition is based on the fractional derive which is a generalization of the ordinary derive, to detail see [6]. Besides we analyzed and development the proof of several theorem relationship with this transform so as its properties more important between are: Linearity, commutability between others. Besides it described one example where we applied it to find the solution of one differential equation fractional see [6] . On the other hand we observed the fractional Fourier transform defined of this way keep its properties front the fractional operators that is a tool very important for the modelization of dynamic process on tortuous means. Finally we described several interesting applications using fractional models between which are: Anomalous diffusion, chaotic transport, super-diffusion, between other.

Keywords: Fractional Derive/ Fractional Fourier Transform

I. INTRODUCCIÓN

En esta investigación tratamos el tema de la transformada fraccionaria de Fourier, definimos y estudiamos la nueva transformada fraccionaria de Fourier continua desde el punto de vista del cálculo fraccionario, esta transformada integral tiene las mismas propiedades frente a los operadores diferenciales fraccionarios que la transformada de Fourier ordinaria.

Antes definimos algunos operadores fraccionarios entre los cuales están: La derivada fraccionaria y la derivada fraccionaria Riemann-Liouville, Integral fraccionaria y la integral fraccionaria Riemann-Liouville.

Por otra parte se expresa la relación de esta transformada con los operadores, dilatación, traslación, convolución y derivación. Además se describen dos teoremas importantes, uno que computa la transformada fraccionaria de Fourier de cualquier función exponencial y el otro la transformada fraccionaria de Fourier de la derivada fraccionaria respectivamente,

A modo de ejemplo aplicamos esta transformada para resolver ciertas ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Finalmente se expresan algunos modelos fraccionarios donde esta transformada integral tiene su aplicación entre estos modelos están: Teoría de los materiales, proceso de transporte, flujo de fluidos, propagación de ondas y teoría de electromagnetismo.

II. DESARROLLO

1. Preliminares

En esta sección se presentan las definiciones de la función Gamma, además de las definiciones de algunos operadores fraccionarios entre los cuales se encuentran: la derivada fraccionaria y la integral fraccionaria.

Definición 1.0 (Función Gamma).

Sea Re(α)>0, t$\in$(0,∞] la función Gamma está definida como: $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} e^t t^{\alpha-1}dt$

Definición 1.1 (Derivada fraccionaria).

Sea 0< $\alpha \leq$ 1, $\beta \in$ R, y u una función medible de Lebesgue es decir u $\in$ L_1(a < b).

Definimos la derivada fraccionaria de u de orden α, β como:

$$(D^{\beta}_{\alpha} u)(x) = (1-\beta)(D^{\alpha}_{+} u)(x) - \beta(D^{\alpha}_{-} u)(x) \quad (1)$$

donde D^{α}_{+} y D^{α}_{-}, son las correspondientes derivadas de Liouville.

Observación 1: Podemos observar que la derivada fraccionaria D^{β}_{α} coincide con la derivada ordinaria para cualquier valor de $\beta \in$ R y α = 1, puesto que:

$$D^{1}_{\beta} = (1-\beta)(D^{1}_{+} u)(x) - (\beta)(D^{1}_{-} u)(x)$$

$$= (1-\beta)\frac{du}{dx} + \beta\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx}$$

Es decir, la derivada fraccionaria es una generalización de la derivada ordinaria o que la derivada ordinaria es un caso particular de la fraccionaria.

Por otra parte es de hacer notar algunos casos particulares interesantes de la derivada fraccionaria definida en (1) los cuales son los siguientes:

1. **Si** $\beta = 0$ entonces $D^{\alpha}_{0} = D^{\alpha}_{+}$
2. **Si** $\beta = 1$ entonces $D^{\alpha}_{1} = -D^{\alpha}_{-}$
3. **Si** β **=** ½ entonces $D^{\alpha}_{1/2} = ½(D^{\alpha}_{+} - D^{\alpha}_{-})$.

Nota 1: El operador $D^{\alpha}_{1/2}$ puede ser interpretado como la inversión del potencial fraccionario Riesz de dimensión uno, el cual es un objeto de gran interés en el campo de las aplicaciones.

Definición 1.2 (Integral fraccionaria).

Sea <α 0, [a, b] $\subset$R, n = -[α] $\in$N y u una función medible de Lebesgue es decir u $\in$ L_1(a,b). Entonces las integrales fraccionarias Riemann-Liouville de orden α están definidas como:

$$(I^{\alpha}_{+a} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad \text{con} \quad (x > a)$$

$$(I^{\alpha}_{-a} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^a (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad \text{con} \quad (x < a)$$

Definición 1.3 (Derivada fraccionaria).

En las condiciones de la definición anterior las derivadas de Riemann- Liouville de f de orden 'a' a la derecha e izquierda, son:

$$(D^{\alpha}_{+} u)(x) = [D^{n} I^{n-\alpha}_{+a} f))](x) \quad (2)$$

$$(D^{\alpha}_{-} u)(x) = [D^{n} I^{n-\alpha}_{-a} f))](x) \quad (3)$$ respectivamente.

Definición 1.4 (Integral fraccionaria).

Sea 0 <$\alpha \leq$ 1, $\beta \in$ R, y u una función medible de Lebesgue es decir u $\in$ L_1(a, b).

Definimos la integral fraccionaria de u de orden α, β como:

$$(I^{\beta}_{\alpha} u)(x) = (1 \ \beta)(I^{\alpha}_{+} u)(x) - \beta(I^{\alpha}_{-} u)(x) \quad (4)$$

donde I^{α}_{+} y I^{α}_{-}, son las correspondientes integrales de Liouville

2. La Transformada Fraccionaria de Fourier

Ahora introduciremos una nueva definición de la transformada fraccionaria de Fourier de orden α, $\Im_{\alpha}$

desde el punto de vista del cálculo fraccionario, definida sobre un espacio de Lizorkin Φ (R).

Definición 2.1 (Funciones test).

Sea S el espacio de las funciones test es decir, el espacio de las funciones infinitamente diferenciables υ (x) sobre R tal que:

$$\gamma_{m,k}(\upsilon) = \text{Sup } (1 + |x|^{m} \; |\upsilon^{k}(x)|) < \infty$$

con $x \in R$, $m \in N_0$, $k \in N_0$ ($N_0 = N \cup \{0\}$)

Además, se denota por V(R) como el conjunto de las funciones $\upsilon \in$ S que satisface que:

$$\frac{d^n}{x^n}\upsilon = 0 \text{ para x=0, con n = 0,1,2…}$$

El espacio de Lizorkin Φ (R) es la imagen inversa de Fourier el espacio V(R) en el espacio S, es decir:

$$\Phi \text{ (R)} = \{ \varphi \in S : \Im(\varphi) \in V(R) \}$$

Definición 2.2 (Transformada fraccionaria de Fourier (FRFT)

Sea $\varphi \in \Phi$ (R), la transformada fraccionaria de Fourier de orden α, **(0<α <1),** se define como sigue**:**

$$\hat{\varphi}_\alpha(\omega) = (\Im_\alpha \varphi)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e_\alpha(\omega, t) dt$$

donde $e_\alpha(\omega,t)$ es el kernel de la transformada fraccionaria de Fourier y se define como sigue:

$$\begin{cases} e_\alpha(\omega,t) = e^{-i!\omega!^{\frac{t1}{\alpha}}} & \text{si } |\omega| \leq 0 \\ e_\alpha(\omega,t) = e^{i!\omega!^{\frac{t1}{\alpha}}} & \text{si } |\omega| \geq 0 \end{cases}$$

De lo anterior se tiene que la transformada fraccionaria de Fourier viene dada por**:**

$$(\Im_\alpha \varphi)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{isign(\omega)!\omega!^{\frac{t}{\alpha}}} dt$$

Observación 2: Podemos observar que si en el kernel de la transformada fraccionaria de Fourier $e_\alpha(\omega,t)$ hacemos α =1, el kernel de la transformada fraccionaria de Fourier coincide con el kernel de la transformada clásica de Fourier $e^{-i\omega t}$ es decir la transformada fraccionaria de Fourier es una generalización de la transformada ordinaria de Fourier.

2.1 Relación de la FRFT con algunos operadores conocidos.

En lo que sigue analizaremos la relación de la FRFT con los operadores traslación τ_h y dilatación Π_λ los cuales vienen definidos de la siguiente manera:

$$\tau_h(\varphi) = \varphi(x-h)$$

con x, h $\in$ R y $(\Pi_\lambda \varphi)(x) = \varphi(\lambda x)$ donde $x \in$ R, λ >0

Lema 1 (Operadores traslación y dilatación)}

Sean $\varphi \in \Phi$ (R), $\alpha >$ 0, $\tau_h(\varphi) = \varphi(x-h)$ y $(\Pi_\lambda \varphi)(x) = \varphi(\lambda x)$, entonces

$$\Im_\alpha(\tau_h(\varphi))(\omega) = e^{i!\omega!^{sign\frac{t1}{\alpha}}} (\Im_\alpha \varphi)(\omega) \text{ y}$$

$$\Im_\alpha(\Pi_\lambda(\varphi))(\omega) = \frac{1}{\lambda}(\Im_\alpha \varphi)(\frac{\omega}{\lambda^\alpha}), \text{ con } \omega \in \text{R.}$$

En particular si α =1, se produce las mismas propiedades para la transformada clásica de Fourier esto es:

$$\Im(\tau_h(\varphi))(\omega) = e^{i!\omega!^{sign\frac{t1}{\alpha}}} (\Im \varphi)(\omega) \text{ y}$$

$$\Im_\alpha(\Pi_\lambda(\varphi))(\omega) = \frac{1}{\lambda}(\Im \varphi)(\frac{\omega}{\lambda}), \quad \omega \in \text{R.}$$

Seguidamente abordaremos dos lemas que relacionan los operadores convolución y derivación con la FRFT.

Lema 2 (Operador convolución)

Sean k, $\varphi \in \Phi$ (R), $\alpha >$ 0, entonces

$$\Im_\alpha(k * \varphi)(\omega) = (\Im_\alpha k)(\omega)(\Im_\alpha \varphi)(\omega)$$

En particular si α =1, se produce las mismas propiedades para la transformada clásica de Fourier esto es:

$$\Im(k * \varphi)(\omega) = (\Im k)(\omega)(\Im \varphi)(\omega)$$

Lema 3 (Operador derivación)

Sean $\varphi \in \Phi$ (R), $\alpha >$ 0, entonces

$$\frac{d}{d\omega}(\Im_\alpha \varphi)(\omega) = \frac{1}{\alpha}|\omega|^{-1+\frac{1}{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} (it)\varphi(t) e^{isign(\omega)!\omega!^{\frac{t}{\alpha}}} dt$$

con $\omega \in$ R.

En particular si α =1, se tiene que:

$$\frac{d}{d\omega}(\Im\varphi)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}(it)\varphi(t)e^{i\omega t}dt$$

2.2 Dos teoremas importantes de la FRFT.

Ahora se expresan dos teoremas importantes uno que calcula la FRFT de cualquier función exponencial y el otro que computa la FRFT de la derivada fraccionaria.

Teorema 1 (La FRFT de una función exponencial)

Sean $\varphi\in$ Φ (R), α > 0, m$\in$N **y** $(\Pi_{\lambda}\varphi)(x)= \varphi(\lambda x)$, entonces

$$(\Im_{\alpha}\varphi^{m})(\omega) = (-sign(\omega)|\omega|^{\frac{i}{\alpha}})^{m}(\Im_{\alpha}\varphi)(\omega)$$

con $\omega\in$R.

En el caso particular cuando hacemos α =1, se tiene que: $(\Im\varphi^{m})(\omega) = (-i\omega)^{m}(\Im\varphi)(\omega)$, con $\omega\in$R.

Teorema 2 (FRFT de la derivada fraccionaria D $^{\beta}_{\alpha}$)

Sean α >0, $\beta\in$R **y** φ una función del espacio de Lizorkin Φ (R) entonces

$$(\Im_{\alpha}D^{\alpha}_{\beta})(\omega) = (-ic_{\alpha}(\omega)\beta)(\Im_{\alpha}\varphi)(\omega) \quad (5)$$

donde $C_{\alpha}(\beta) = \sin(\frac{\alpha\pi}{2}) + isign(\omega)(1-2\beta)\cos(\frac{\alpha\pi}{2})$

En particular, si hacemos β = 1/2, tenemos que la derivada fraccionaria $D^{\alpha}_{1/2}$=1/2(½(D^{α}_{+} - D^{α}_{-}), luego la ecuación (5) se puede expresar como sigue:

$$(\Im_{\alpha}D^{\alpha}_{\frac{1}{2}})(\omega) = (-i\sin(\alpha\pi/2)(\omega))(\Im_{\alpha}\varphi)(\omega)$$

3. La FRFT y las ecuaciones diferenciales fraccionarias.

En esta sección abordaremos una aplicación de la transformada fraccionaria de Fourier en el campo de la matemática pura específicamente en el tópico de las ecuaciones diferenciales fraccionaria que es un ente matemático muy utilizado en los modelos del cálculo fraccionario.

El objetivo primordial de este ejemplo es mostrar que la FRFT es una herramienta muy útil en la resolución de un cierto tipo de ecuaciones.

Ejemplo 1. Sea la siguiente ecuación diferencial fraccionaria:

$$(D^{\alpha}_{\beta;x}u)(x,t) = ({}^{C}D^{\gamma}_{t})(x,t)\text{, con } x\in R,\ t> 0 \quad (6)$$

Ahora aplicando el operador transformada fraccionaria de Fourier $\Im_{\alpha};x$ a ambos lados de la ecuación (6) se tiene que:

$$(-i\omega c_{\alpha}(\beta)(\Im_{\alpha,x}(\omega,t)) = ({}^{C}D^{\gamma}_{-;t}\Im_{\alpha;x})(\omega,t) \quad (7)$$

Ahora aplicamos la transformada clásica de Laplace a ambos lados de la ecuación (7) se obtiene lo siguiente:

$$-i\omega c_{\alpha}(\beta)(L\Im_{\alpha,x}u)(\omega,t) =$$

$$s^{\gamma}(L\Im_{\alpha,x}u)(\omega,s) - \sum_{k=0}^{m-1}s^{\gamma-1-k}(\Im_{\alpha;x}g_{k})(x)$$

Es decir:

$$(L\Im_{\alpha,x}u)(\omega,t) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{s^{\gamma-1-k}}{s^{\gamma}+i\omega c_{\alpha}(\beta)}(\Im_{\alpha;x}g_{k})(x)$$

donde $(\Im_{\alpha;x}u)$ es la transformada fraccionaria de Fourier de la función con respecto a x.

Finalmente realizando algunas manipulaciones algebraicas se obtiene que:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi\alpha}\sum_{k=0}^{m-1}t^{k}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-sign(\omega)!\omega!^{\frac{1}{\alpha}ix}}|\omega|^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

$$E_{\gamma,k+1}(i\omega c_{\alpha}(\beta)t^{\gamma})(\Im_{\alpha;x}g_{k})(\omega)d\omega$$

donde $E_{\gamma,k+1}(i\omega c_{\alpha}(\beta)t^{\gamma})$ es la función Mittag-Leffer.

Por lo tanto se ha obtenido la solución de la ecuación diferencial fraccionaria dada en la ecuación (6).

4. Modelos fraccionarios

En esta sección se presentarán algunos modelos fraccionarios en los cuales la herramienta

Principal que se utiliza es la teoría del cálculo fraccionario para modelar ciertos fenómenos que se presentan en la naturaleza, entre estos modelos están los siguientes:

- Teoría de los Materiales
- Procesos de Transporte
- Flujo de Fluidos
- Propagación de Ondas
- Teoría de Electromagnetismo

Para obtener más detalle de este de tópico se puede consultar los siguientes trabajos de investigación relacionados con este tema:

i. En teoría de los Materiales, el trabajo de N. Shimizu y W. Zhang, Fractional calculus approach to dynamic problems of viscoelastic materials [1].

ii. En procesos de Transporte, el trabajos de B. Berkowits y H. Sche, Theory of anomalous chemical transport in random fracture networks [2].

iii. En flujo de Fluidos, el artículo de D. del Castillo-Negrete, Chaotic transport in zonal ows in analogous geophysical and plasma systems [3].

iv Propagación de Ondas, el artículo de A. Hanyga, Wave propagation in poroelasticity: Equations and solutions [4].

v En teoría de Electromagnetismo, el trabajo de N. Engheta, On the role of fractional calculus in electromagnetic theory [5]

III. CONCLUSIONES

1. Entre los aportes significativos que presenta esta investigación, está una propuesta
2. de una nueva definición de la transformada fraccionaria de Fourier desde el punto de vista del cálculo fraccionario con sus respectivas propiedades.
3. Las demostraciones de las propiedades del núcleo de esta transformada integral, así como también las demostraciones de las propiedades de la transformada fraccionaria de Fourier. Entre las futuras investigaciones de este tópico se encuentran: La extensión multidimensional de la transformada fraccionaria de Fourier y el estudio de sus propiedades.
4. La aplicación de la transformada fraccionaria de Fourier utilizando la derivada fraccionaria a otros campos de la matemática pura y aplicada. La Implementación de un código Matlab para esta transformada integral, para el estudio del caso discreto.

IV. REFERENCIAS

1. Shimizu N. y Zhang, W. Fractional calculus approach to dynamic problems of viscoelastic materials, JSME Internat. J. C, 42(4), (1999) pp. 825-837.
2. B. Berkowits y H. Sche, Theory of anomalous chemical transport in random fracture networks, Phys. Rev. E, 57(5), (1998) pp. 5858-5869.
3. D. del Castillo-Negrete, Chaotic transport in zonal ows in analogous geophysical and plasma systems, Phys. Plasma, 7(5), (2000) pp. 1702-1711.
4. A. Hanyga, Wave propagation in poroelasticity: Equations and solutions, Geophysical journal International, 137(2), (1999) pp. 319-335.
5. N. Engheta, On the role of fractional calculus in electromagnetic theory, IEEE Antenn. Propag., 39(4), (1997) pp. 35-46.
6. A.A. Kilbas y J. J. Trujillo, Differential equation of fractional order: methods, results and problems. II, Appl. Anal., 81(2), (2002) pp. 435-493.
7. N. Engheta, On the role of fractional calculus in electromagnetic theory, IEEE Antenn. Propag., 39(4), (1997) pp. 35-46.
8. B.J. West, M. Bologna y P. Grigolini, Physics of fractal operators, Springer-Verlag New York Inc., 2003.
9. A.A. Kilbas y J.J. Trujillo, Dierential equation of fractional order: methods, results and problems. II, Appl. Anal., 81(2), (2002) pp. 435-493.
10. B.J. West, M. Bologna y P. Grigolini, Physics of fractal operators, Springer- Verlag New York Inc., 2003.
11. Y.F. Luchko, H. Mart__nez y J.J. Trujillo, Fractional Fourier transform and some of its applications, Frac. Cal. Appl. Anal., 11(4), (2008) pp. 457-470.