

## INFLUENCIA DE LAS DILATACIONES TÉRMICAS EN LA DESCALIBRACIÓN DEL MOVIMIENTO PARALELO DE LAS TRES CUCHILLAS DE PUESTA A TIERRA DE UN SECCIONADOR ELÉCTRICO

Mendoza, Jesús Alberto<sup>1</sup> Caraballo, Simón Antonio<sup>1</sup>,

Solis, Daniela de Jesús<sup>1</sup> Gómez, Orlando José<sup>1</sup>

(Recibido febrero 2012, Aceptado mayo 2012)

UNEXPO, Vicerrectorado Puerto Ordaz, Dpto. de Ingeniería Mecánica

Email: jesus\_mendozaq@yahoo.com, simoncaraballo@hotmail.com;

dscasillas@hotmail.com, ogomez\_17339210@yahoo.es

**Resumen:** Entre otros tipos de seccionadores eléctricos, CORPOELEC usa, en la subestación de Macagua 400 kV, seis seccionadores Hapam modelo HAC-EV, fabricados en Los Países Bajos e instalados en 2002. Cada uno de estos seccionadores eléctricos tiene un mecanismo secundario de palancas, de accionamiento manual, usado para la puesta a tierra, constituido por dieciséis elementos móviles más un bastidor. Los elementos de salida del mecanismo son tres brazos mecánicos comúnmente denominados cuchillas, cada una de las cuales tiene dos etapas de movimiento. La etapa inicial es de rotación pura en un plano vertical y la etapa final es de traslación pura ascendente en el mismo plano. Este trabajo presenta el desarrollo del modelo matemático que permite calcular cómo las dilataciones térmicas de los eslabones del mecanismo pueden desajustar el movimiento simultáneo y paralelo de las tres cuchillas y producir un atasco de las partes en movimiento. Como resultado del análisis se concluye que debido a su principio de operación, éste mecanismo es susceptible de desajustarse debido a las dilataciones térmicas y se aconseja modificar su diseño, tomando en cuenta la influencia de estas dilataciones en su desajuste, antes de usarse como mecanismo de puesta a tierra en nuestras latitudes.

**Palabras clave:** Ajuste/ Calibración/ Mecanismos de Puesta a Tierra/ Seccionador Eléctrico/ Dilatación Térmica.

## INFLUENCE OF THERMAL EXPANSIONS ON THE DECALIBRATION OF THE PARALLEL MOVEMENT OF THE THREE KNIVES OF A GROUNDING SWITCH MECHANISM

**Abstract:** Among other types of grounding switches, CORPOELEC uses six Hapam HEC-EV switch operating mechanisms at Macagua 400 kV electrical substations, manufactured in the Netherlands and installed in 2002. Each of these devices has a secondary mechanical linkage for grounding, which is manually operated. The mechanism consists of sixteen mobile elements plus a frame, which work together to move simultaneously a set of three rotary output links, currently called knives, each of which has two stages of movement. The initial stage is a pure rotation in a vertical plane and the final stage is a pure upward translation at the same plane. This paper presents a development of a mathematical model to find out how the thermal expansion of the grounding linkage may disarrange the simultaneous and parallel movement of the three knives and produce a blockage of the moving parts. The results show that this mechanism is susceptible of disarranging due to thermal expansions and is advised to modify the original design, taking into account the influence of these expansions before using this mechanism for grounding in this latitude.

**Keywords:** Adjust/ Calibration/ Grounding Mechanism, Switch Operating Mechanism/ Thermal Expansion

### I. INTRODUCCIÓN

Un seccionador eléctrico es un artificio mecánico de seguridad usado durante las maniobras de operación y mantenimiento de una subestación eléctrica y sirve para separar físicamente de la red eléctrica, cada uno de los tres cables de conducción principal que han sido primero previamente desconectados del sistema de alimentación por otro dispositivo mecánico conocido con el nombre de

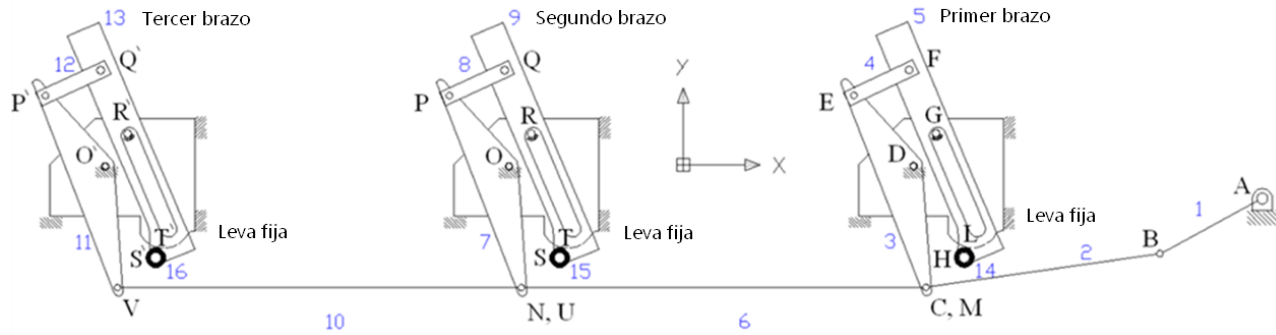
interruptor eléctrico. Cada uno de estos seccionadores tiene, adicional al propio mecanismo principal de seccionamiento, un *mecanismo secundario* de seguridad usado para la puesta a tierra.

Entre otros tipos de seccionadores eléctricos, CORPOELEC usa, en la subestación de Macagua 400 kV, seis seccionadores Hapam modelo HAC-EV, fabricados en los Países bajos e instalados en el año 2002. Tres de

estos han presentado roturas en sus mecanismos manuales secundarios de puesta a tierra.

Los elementos de salida del mecanismo secundario son *tres brazos ranurados* numeradas como 5, 9 y 13 en la Figura 1, en cuyos extremos superiores se fijan las cuchillas de puesta a tierra, no representadas en el

esquema. Cada brazo (en adelante se usará el término *cuchilla* para designar a estos brazos) tiene *dos etapas* de movimiento: una inicial de rotación pura y otra posterior de traslación ascendente.



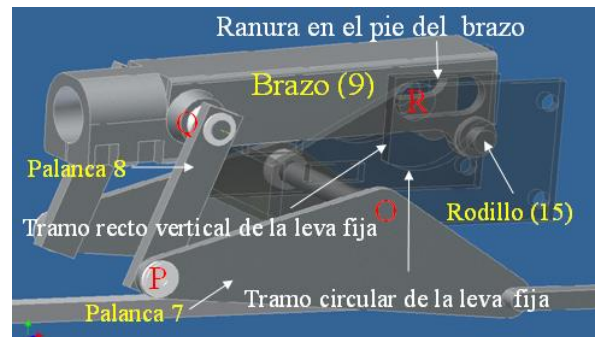
**Figura 1. Mecanismo de puesta a tierra del seccionador Hapam HAC-EV. Los pares A, D, O y O' son fijos. Los eslabones 14, 15 y 16 son los rodillos seguidores. Los pares L, T y T' son pares de contacto puntual entre los rodillos y las levas. Las cuchillas se fijan a los brazos 5, 9 y 13.**

Las cuchillas están vinculadas al bastidor por los pares especiales de doble propósito G, R, y R'. Estos pares son de doble propósito porque durante la primera etapa de movimiento de las cuchillas, son rotatorios y durante la segunda, son cilindro-plano. La separación nominal entre los centros de los nodos cinemáticos de estos pares es de 7 m a lo largo de la horizontal. Las cuchillas deben moverse siempre *paralelas* en un plano vertical para cerrar y abrir cuando sea necesario, el circuito de puesta a tierra.

Los eslabones 2, 6 y 10 del mecanismo son los tres eslabones de calibración longitudinal que corrigen los errores de posicionamiento de las cuchillas con el fin de lograr que estas marchen simultáneamente paralelas durante su operación.

Además de una ranura, cada una de las tres cuchillas tiene *en su pie* una *prolongación protuberante* como se indica en la Figura 2. En la zona protuberante del pie de cada cuchilla se articula un rodillo seguidor que rueda sobre una leva fija en el bastidor. La leva fija tiene un perfil compuesto por un tramo curvo semicircular y por un tramo de línea recta vertical. La zona de transición de la leva fija es aquella que marca su cambio de perfil.

El subconjunto bastidor 0, brazo o cuchilla 9 y rodillo 15, de la Figura 2 conforma durante la primera etapa de movimiento de esta cuchilla, un tren epicíclico en el que la cuchilla 9 en movimiento de rotación pura *transporta* consigo al *rodillo seguidor* 15. De esta manera, en este tren epicíclico, la cuchilla 9 tiene la entrada de movimiento y es el *portasatélite del tren*. La leva fija *funge de sol detenido* y en consecuencia es parte del bastidor. Los otros subconjuntos cinemáticos de este tipo son los conformados por los eslabones 0-14-5 y 0-16-13.



**Figura 2. Subconjunto contenido del segundo brazo. El par O es un par rotatorio fijo. El par R es de doble propósito.**

Una vez que cada rodillo seguidor recorre, arrastrado por su cuchilla correspondiente, todo el tramo circular del perfil de cada leva fija y se encuentra justo en posición vertical teórica, entonces está listo para iniciar la *segunda etapa* de movimiento en la que cada cuchilla se moverá sólo en traslación ascendente vertical a lo largo de la ranura practicada en el brazo portador de cada cuchilla.

Para lograr el correcto funcionamiento del mecanismo de puesta a tierra, *las tres cuchillas* deben iniciar la segunda etapa de movimiento, *al mismo tiempo*, y esto sólo ocurre si las cuchillas están *verticales* y *paralelas entre sí* y todos los rodillos han finalizado *simultáneamente* sus carreras de rodadura sobre sus correspondientes tramos circulares de leva. Sin embargo, esto dependerá de la precisión de fabricación y montaje de los eslabones del mecanismo y de la influencia o no de las dilataciones térmicas.

La *sincronización y paralelismo* del movimiento de las tres cuchillas cuando sus rodillos están moviéndose en torno a la zona de transición de las levas es fundamental porque un error de paralelismo entre ellas, fuera de los límites permitidos, hace que al menos uno de los rodillos seguidores se atasque alrededor de esta zona, ocasionando la rotura de la cuchilla trabada, en su región más débil. El atascamiento se debe a que el rodillo trabado no ha terminado de finalizar su carrera sobre el perfil curvo de la leva cuando los otros dos rodillos si lo han hecho, de modo que estos se encuentran libres para ascender sobre sus correspondientes perfiles rectos pero el trabado todavía no lo está y al intentar ascender choca contra la superficie curva.

Este trabajo presenta el desarrollo del modelo matemático que permite encontrar cómo las dilataciones térmicas que ocurren principalmente sobre los eslabones más grandes del mecanismo de puesta a tierra estudiado, desajustan durante el verano la calibración previa del mecanismo. Como resultado, se llega a la conclusión de que este mecanismo, fabricado en Los Países Bajos, es susceptible de desajustarse al calor del trópico y de trabarse y por lo tanto no debería ser adquirido por CORPOELEC a menos que sea modificado su diseño para evitar la trabadura durante su operación.

## II. DESARROLLO

Se determinará a continuación la influencia que tiene las dilataciones térmicas de los eslabones más grandes del mecanismo sobre la posición angular precisa de cada cuchilla de puesta a tierra, cuando estas alcanzan la posición vertical teórica. Para ello es necesario definir el conjunto de coordenadas generalizadas  $\{q_i\}$ , y el conjunto de parámetros geométricos  $\{p_j\}$  del eslabonamiento de palancas estudiado.

De acuerdo con la Figura 3, el conjunto  $\{q_i\}$  cuyos elementos son las coordenadas generalizadas que definen la posición angular  $q_i$  de todos los eslabones del mecanismo de palancas, está dado por (1):

$$\{q_i\} = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \\ \varphi_9, \varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13} \end{array} \right\} \quad (1)$$

A su vez, cada coordenada generalizada  $q_i$  del mecanismo tiene asociado un error angular posicional, definido por el conjunto  $\{\delta q_i\}$ , señalado en (2).

$$\{\delta q_i\} = \left\{ \begin{array}{l} \delta \rho_1, \delta \rho_2, \delta \rho_3, \delta \rho_4, \delta \rho_5, \delta \rho_6, \delta \rho_7, \\ \delta \rho_8, \delta \rho_9, \delta \rho_{10}, \delta \rho_{11}, \delta \rho_{12}, \delta \rho_{13} \end{array} \right\} \quad (2)$$

Estos dos conjuntos  $\{q_i\}$  y  $\{\delta q_i\}$  tienen 13 elementos.

Por otra parte, el conjunto  $\{p_j\}$  de parámetros geométricos que definen la geometría funcional del mecanismo de palancas se obtiene también de la figura 3 y está dado en la ecuación (3).

$$\{p_j\} = \left\{ \begin{array}{l} l_1, l_2, r_3, a_1, b_1, l_3, l_4, l_5, a_2, b_2, l_6, l_7, \\ a_3, b_3, r_7, l_8, l_9, a_4, b_4, \beta_1, \beta_2, l_{10}, l_{11}, \\ a_5, b_5, r_{11}, l_{12}, l_{13}, a_6, b_6, \beta_3 \end{array} \right\} \quad (3)$$

Cada uno de los 31 parámetros geométricos  $p_j$ , del conjunto  $\{p_j\}$  dado en (3) y en el apéndice A tiene asociado en la práctica una variación dimensional  $\delta p_j$  debido a múltiples factores, dentro de los cuales los más importantes son los errores de fabricación y montaje y las dilataciones térmicas. El mecanismo se diseña para que las variaciones longitudinales controladas,  $\delta l_2, \delta l_6, \delta l_{10}$ , de los eslabones de calibración 2, 6 y 10 respectivamente, contrarresten durante el montaje y el mantenimiento estos inevitables errores. Sin embargo, las dilataciones térmicas que pueden ocurrir en la dirección longitudinal de los eslabones debido a las temperaturas elevadas del trópico, pueden desajustar la calibración lograda durante el montaje inicial, en especial si el montaje se hace durante una época fresca del año, ya que en estas circunstancias el gradiente de temperatura entre el verano y la época en la que pudo haberse hecho el montaje, es mayor.

Todas las variaciones dimensionales longitudinales posibles  $\delta p_j$ , quedan expresadas en este mecanismo por los 31 términos definidos en (4).

$$\{\delta p_j\} = \left\{ \begin{array}{l} \delta l_1, \delta l_2, \delta r_3, \delta a_1, \delta b_1, \delta l_3, \delta l_4, \delta l_5, \\ \delta a_2, \delta b_2, \delta l_6, \delta l_7, \delta a_3, \delta b_3, \delta r_7, \delta l_8, \\ \delta l_9, \delta a_4, \delta b_4, \delta \beta_1, \delta \beta_2, \delta l_{10}, \delta l_{11}, \\ \delta a_5, \delta b_5, \delta r_{11}, \delta l_{12}, \delta l_{13}, \delta a_6, \delta b_6, \delta \beta_3 \end{array} \right\} \quad (4)$$

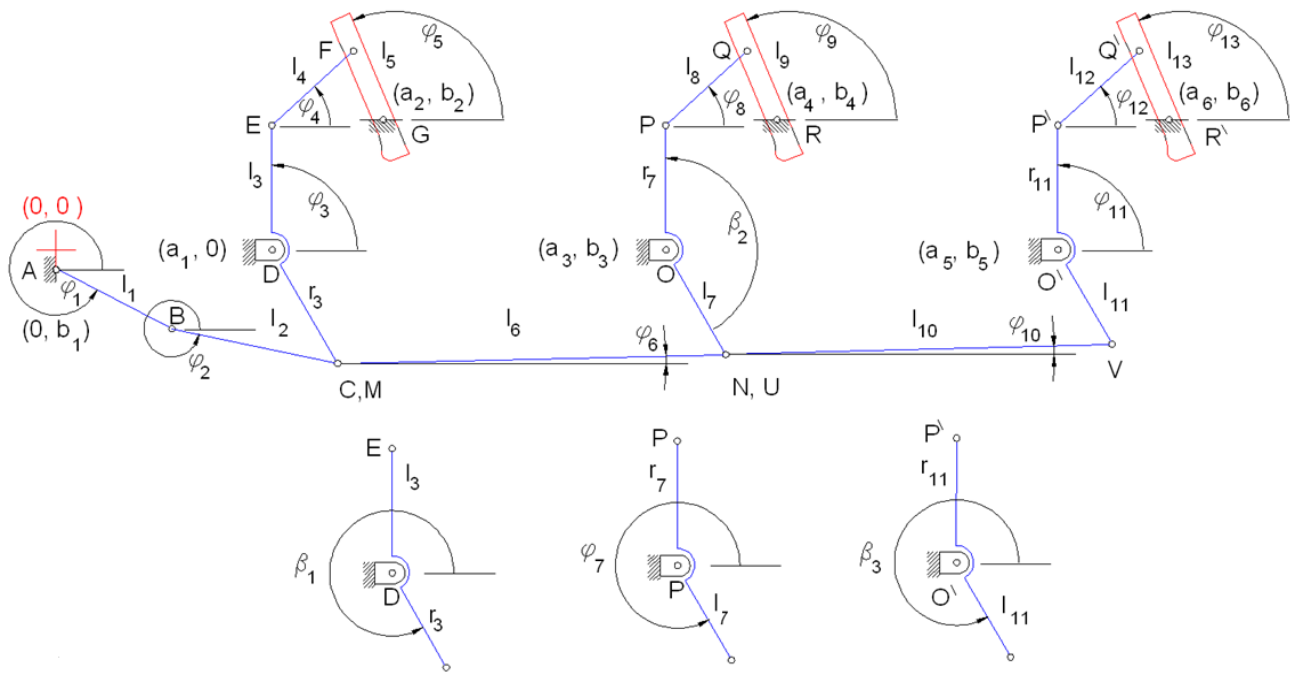


Figura 3. Treinta y un parámetros geométricos y trece coordenadas generalizadas del mecanismo de puesta a tierra.

## 1. Análisis Cinemático

### 1.1. Ecuaciones de restricción cinemática

Las proyecciones [1], [2], sobre el eje  $x$  y sobre el eje  $y$  de cada uno de los seis ciclos cinemáticos independientes del eslabonamiento de puesta a tierra de la figura 3 dan el conjunto de 12 ecuaciones de restricción cinemática  $\Phi_i$  indicadas en (5):

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 - r_3 \cos (\varphi_3 + \beta_1) - a_1 = 0 \\
 \Phi_2 &= b_1 + l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 - r_3 \sin (\varphi_3 + \beta_1) = 0 \\
 \Phi_3 &= l_3 \cos \varphi_3 + l_4 \cos \varphi_4 - l_5 \cos (\varphi_5) - (a_2 - a_1) = 0 \\
 \Phi_4 &= -b_2 + l_3 \sin \varphi_3 + l_4 \sin \varphi_4 - l_5 \sin \varphi_5 = 0 \\
 \Phi_5 &= r_3 \cos (\varphi_3 + \beta_1) + l_6 \cos \varphi_6 - l_7 \cos (\varphi_7) \\
 &\quad - (a_3 - a_1) = 0 \\
 \Phi_6 &= b_3 + r_3 \sin (\varphi_3 + \beta_1) + l_6 \sin \varphi_6 - l_7 \sin (\varphi_7) = 0 \\
 \Phi_7 &= r_7 \cos (\varphi_7 + \beta_2) + l_8 \cos \varphi_8 - l_9 \cos (\varphi_9) \\
 &\quad + (a_3 - a_4) = 0 \\
 \Phi_8 &= -b_4 + r_7 \sin (\varphi_7 + \beta_2) + l_8 \sin \varphi_8 - l_9 \sin \varphi_9 = 0 \\
 \Phi_9 &= l_7 \cos \varphi_7 + l_{10} \cos \varphi_{10} - l_{11} \cos (\varphi_{11} + \beta_3) - (a_5 - a_4) = 0 \\
 \Phi_{10} &= l_7 \sin \varphi_7 + l_{10} \sin \varphi_{10} - l_{11} \sin (\varphi_{11} + \beta_3) + b_5 = 0 \\
 \Phi_{11} &= r_{11} \cos \varphi_{11} + l_{12} \cos \varphi_{12} - l_{13} \cos (\varphi_{13}) - (a_6 - a_5) = 0 \\
 \Phi_{12} &= r_{11} \sin \varphi_{11} + l_{12} \sin \varphi_{12} - l_{13} \sin (\varphi_{13}) - b_6 = 0; \quad (5)
 \end{aligned}$$

### 1.2. Diferenciales totales de las ecuaciones de restricción cinemática

Las diferenciales totales de las doce ecuaciones de restricción cinemática dadas en la ecuación (5), conduce

al sistema de doce ecuaciones de restricciones  $\delta\Phi_i$ , designadas como (6). Este conjunto de ecuaciones (6), contiene las relaciones entre las posibles variaciones longitudinales  $\delta p_j$  de todos los parámetros geométricos  $p_j$  respecto a sus valores nominales y los errores posicionales  $\delta q_i$  de todas las coordenadas generalizadas respecto a las posiciones nominales teóricas de todos los eslabones.

El conjunto (6) de doce ecuaciones diferenciales totales obtenidas de las doce ecuaciones de restricción cinemática dadas en (5), es:

$$\begin{aligned}
 \delta\Phi_1 &= \cos \varphi_1 \delta l_1 + \cos \varphi_2 \delta l_2 - \cos (\varphi_3 + \beta_1) \delta r_3 \\
 &\quad - \delta a_1 - l_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2 \delta \varphi_2 \\
 &\quad + r_3 \sin (\varphi_3 + \beta_1) \delta \varphi_3 + r_3 \sin (\varphi_3 + \beta_1) \delta \beta_1 = 0 \\
 \delta\Phi_2 &= \delta b_1 + \sin \varphi_1 \delta l_1 + \sin \varphi_2 \delta l_2 - \sin (\varphi_3 + \beta_1) \delta r_3 \\
 &\quad + l_1 \cos \varphi_1 \delta \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \delta \varphi_2 \\
 &\quad - r_3 \cos (\varphi_3 + \beta_1) \delta \varphi_3 - r_3 \cos (\varphi_3 + \beta_1) \delta \beta_1 = 0 \\
 \delta\Phi_3 &= \cos \varphi_3 \delta l_3 + \cos \varphi_4 \delta l_4 - \cos (\varphi_5) \delta l_5 - \delta a_2 \\
 &\quad + \delta a_1 - l_3 \sin \varphi_3 \delta \varphi_3 - l_4 \sin \varphi_4 \delta \varphi_4 \\
 &\quad + l_5 \sin (\varphi_5) \delta \varphi_5 = 0 \\
 \delta\Phi_4 &= -\delta b_2 + \sin \varphi_3 \delta l_3 + \sin \varphi_4 \delta l_4 - \sin (\varphi_5) \delta l_5 \\
 &\quad + l_3 \cos \varphi_3 \delta \varphi_3 + l_4 \cos \varphi_4 \delta \varphi_4 \\
 &\quad - l_5 \cos (\varphi_5) \delta \varphi_5 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\Phi_5 &= \cos(\phi_3 + \beta_1)\delta r_3 + \cos\phi_6\delta l_6 - \cos(\phi_7)\delta l_7 \\ &\quad - \delta\alpha_3 + \delta\alpha_1 - r_3 \sin(\phi_3 + \beta_1)\delta\phi_3 \\ &\quad - r_3 \sin(\phi_3 + \beta_1)\delta\beta_1 - l_6 \sin(\phi_6)\delta\phi_6 \\ &\quad + l_7 \sin(\phi_7)\delta\phi_7 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\Phi_6 &= \delta b_3 + \sin(\phi_3 + \beta_1)\delta r_3 + \sin\phi_6\delta l_6 - \sin(\phi_7)\delta l_7 \\ &\quad + r_3 \cos(\phi_3 + \beta_1)\delta\phi_3 + r_3 \cos(\phi_3 + \beta_1)\delta\beta_1 \\ &\quad + l_6 \cos(\phi_6)\delta\phi_6 - l_7 \cos(\phi_7)\delta\phi_7 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\Phi_7 &= \cos(\phi_7 + \beta_2)\delta r_7 + \cos\phi_8\delta l_8 - \cos(\phi_9)\delta l_9 \\ &\quad + \delta\alpha_3 - \delta\alpha_4 - r_7 \sin(\phi_7 + \beta_2)\delta\phi_7 \\ &\quad - r_7 \sin(\phi_7 + \beta_2)\delta\beta_2 - l_8 \sin(\phi_8)\delta\phi_8 \\ &\quad + l_9 \sin(\phi_9)\delta\phi_9 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\Phi_8 &= -\delta b_4 + \sin(\phi_7 + \beta_2)\delta r_7 + \sin\phi_8\delta l_8 \\ &\quad - \sin(\phi_9)\delta l_9 + r_7 \cos(\phi_7 + \beta_2)\delta\phi_7 \\ &\quad + r_7 \cos(\phi_7 + \beta_2)\delta\beta_2 + l_8 \cos(\phi_8)\delta\phi_8 \\ &\quad - l_9 \cos(\phi_9)\delta\phi_9 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\Phi_9 &= \cos\phi_7\delta l_7 + \cos\phi_{10}\delta l_{10} - \cos(\phi_{11} + \beta_3)\delta l_{11} \\ &\quad - \delta\alpha_5 + \delta\alpha_3 - l_7 \sin\phi_7\delta\phi_7 - l_{10} \sin\phi_{10}\delta\phi_{10} \\ &\quad + l_{11} \sin(\phi_{11} + \beta_3)\delta\phi_{11} + l_{11} \sin(\phi_{11} + \beta_3)\delta\beta_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\Phi_{10} &= \sin\phi_7\delta l_7 + \sin\phi_{10}\delta l_{10} - \sin(\phi_{11} + \beta_3)\delta l_{11} \\ &\quad + \delta b_5 + l_7 \cos\phi_7\delta\phi_7 + l_{10} \cos\phi_{10}\delta\phi_{10} \\ &\quad - l_{11} \cos(\phi_{11} + \beta_3)\delta\phi_{11} - l_{11} \cos(\phi_{11} + \beta_3)\delta\beta_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\Phi_{11} &= \cos\phi_{11}\delta r_{11} + \cos\phi_{12}\delta l_{12} - \cos(\phi_{13})\delta l_{13} - \delta\alpha_6 \\ &\quad + \delta\alpha_5 - r_{11} \sin\phi_{11}\delta\phi_{11} - l_{12} \sin\phi_{12}\delta\phi_{12} \\ &\quad + l_{13} \sin(\phi_{13})\delta\phi_{13} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\Phi_{12} &= -\delta b_6 + \sin\phi_{11}\delta r_{11} + \sin\phi_{12}\delta l_{12} - \sin(\phi_{13})\delta l_{13} \\ &\quad + r_{11} \cos\phi_{11}\delta\phi_{11} + l_{12} \cos\phi_{12}\delta\phi_{12} \\ &\quad - l_{13} \cos(\phi_{13})\delta\phi_{13} = 0 \end{aligned}$$

(6)

### 1.3. Forma matricial del sistema de ecuaciones formado por las diferenciales totales de las ecuaciones de restricción cinemática

Fogarasy y Smith [3] muestran que el conjunto de ecuaciones dadas en (6) puede ser compactado en forma matricial como lo expresa la ecuación (7),

$$\left[ \frac{\partial\Phi_k}{\partial p_j} \right] \left[ \begin{matrix} \delta p_j \\ \delta q_i \end{matrix} \right] + \left[ \frac{\partial\Phi_k}{\partial q_i} \right] [\delta q_i] = 0 \quad (7)$$

En esta ecuación (7), los errores posicionales  $[\delta q_i]$  de todos los eslabones, como una función de los 31 cambios longitudinales  $[\delta p_j]$  de sus parámetros geométricos, y

del error en la coordenada de entrada  $[\delta q_1]$ , están dados por la ecuación (8),

$$\begin{aligned} [\delta q_i] &= [B]^{-1} [A] \left[ \begin{matrix} \delta p_j \\ \delta q_1 \end{matrix} \right] = - \left[ \frac{\partial\Phi_k}{\partial q_i} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial\Phi_k}{\partial p_j} \right] \left[ \begin{matrix} \delta p_j \\ \delta q_1 \end{matrix} \right] = \\ &= - [E_{ij}] \left[ \begin{matrix} \delta p_j \\ \delta q_1 \end{matrix} \right] \quad (8) \end{aligned}$$

Para esta aplicación práctica sólo interesan los errores posicionales  $\delta p_5, \delta p_9$  y  $\delta p_{13}$  de las cuchillas de salida 5 (primera), 9 (segunda) y 13 (tercera) respecto a sus posiciones nominales *verticales*, porque es en esta posición que alguno de los tres rodillos pudiera trabarse. Luego, sólo los errores  $\delta p_5, \delta p_9$  y  $\delta p_{13}$  son explícitamente requeridos de la ecuación (8).

Para este mecanismo, la matriz  $[A]$  tiene doce filas (el número de ecuaciones diferenciales totales) y treinta y dos columnas (el número de parámetros geométricos más la coordenada generalizada de entrada), mientras que las matrices  $[B]$  y  $[B]^{-1}$  son ambas de doce filas y doce columnas. No hay espacio en esta sección del trabajo para mostrar los términos completos de las matrices  $[A]$ ,  $[B]$  y  $[B]^{-1}$  de la ecuación (8). Sin embargo, estas matrices se muestran completas en los apéndices B, C y D.

### 1.4. Error posicional de la primera cuchilla debido a las dilataciones térmicas

Mediante la multiplicación de las matrices  $[B]^{-1}$  y  $[A]$  y obteniendo explícitamente  $\delta p_5$  de la ecuación (8), se tiene el error posicional ( $\delta p_5$ ) de la primera cuchilla de puesta a tierra respecto a las posiciones nominales teóricas de esta cuchilla, debido a las dilataciones térmicas de todos los eslabones constituyentes del mecanismo. Éste error está dado por la ecuación (9).

$$\begin{aligned} \delta p_5 &= \\ &= -(c_{41}a_{11} + c_{42}a_{21})\delta l_1 - (c_{41}a_{12} + c_{42}a_{22})\delta l_2 \\ &\quad - (c_{41}a_{13} + c_{42}a_{23})\delta r_3 - (c_{41}a_{14} + c_{43}a_{34})\delta\alpha_1 - c_{42}a_{25}\delta b_1 \\ &\quad - (c_{43}a_{36} + c_{44}a_{46})\delta l_3 - (c_{43}a_{37} + c_{44}a_{47})\delta l_4 \\ &\quad - (c_{43}a_{38} + c_{44}a_{48})\delta l_5 - (c_{43}a_{39})\delta\alpha_2 - (c_{44}a_{4,10})\delta b_2 \\ &\quad + 0\delta l_6 + 0\delta l_7 + 0\delta\alpha_3 + 0\delta b_3 + 0\delta r_7 + 0\delta l_8 + 0\delta l_9 \\ &\quad + 0\delta\alpha_4 + 0\delta b_4 - (c_{41}a_{1,20} + c_{42}a_{2,20})\delta\beta_1 + 0\delta\beta_2 \\ &\quad + 0\delta l_{10} + 0\delta l_{11} + 0\delta\alpha_5 \\ &\quad + 0\delta b_5 + 0\delta r_{11} + 0\delta l_{12} + 0\delta l_{13} + 0\delta\alpha_6 + 0\delta b_6 + 0\delta\beta_3 \\ &\quad - (c_{41}a_{1,32} + c_{42}a_{2,32})\delta p_{13}; \quad (9) \end{aligned}$$

Cada término entre paréntesis de la ecuación (9), incluyendo los que son iguales a cero, representa el

coeficiente de influencia  $\varepsilon_{5,j}$  que tiene cada unidad de cambio dimensional  $\delta p_j$  de cada parámetro geométrico en la posición angular de la primera cuchilla, numerada como 5.

El último término entre paréntesis de la ecuación (9) que multiplica al error posicional de entrada  $\delta \rho_1$ , de la coordenada de entrada  $\varphi_1$ , es el coeficiente de influencia,  $\varepsilon_{5,\delta \rho_1}$  de dicho error de entrada  $\delta \rho_1$ , en el error posicional de la cuchilla 5.

Los factores  $\{a_{nm}\}$  y  $\{c_{nm}\}$  de la ecuación (9) provienen de los términos de las matrices  $[A]$  y  $[B]^{-1}$  respectivamente y se desarrollan completos en el apéndice E. Es de hacer notar que los factores  $\{a_{nm}\}$  y  $\{c_{nm}\}$  son variables y dependen de las longitudes nominales de los parámetros geométricos y de la *posición particular* del eslabón de entrada del mecanismo. Sin embargo, en el caso aquí estudiado interesa saber los valores de  $\{a_{nm}\}$  y  $\{c_{nm}\}$  cuando el ángulo de entrada respecto a la horizontal positiva es  $\varphi_1 = 315^\circ$  porque es para éste ángulo que las tres cuchillas alcanzan durante su movimiento, sus posiciones verticales teóricas, que son las posiciones críticas en las que pudieran trabarse.

**1.5. Error posicional de la segunda cuchilla debido a las dilataciones térmicas**

Mediante la multiplicación de las matrices  $[B]^{-1}$  y  $[A]$  y obteniendo explícitamente  $\delta \rho_9$  de la ecuación (8), se tiene el error posicional ( $\delta \rho_9$ ) de la segunda cuchilla de puesta a tierra respecto a las posiciones nominales teóricas de esta cuchilla, debido a las dilataciones térmicas de todos los eslabones constituyentes del mecanismo.

El error posicional de la segunda cuchilla, cuando se toma en cuenta las posibles dilataciones térmicas de todos los eslabones constituyentes del mecanismo, viene dado por:

$$\begin{aligned} \delta \rho_9 = & -(c_{81}a_{11} + c_{82}a_{21})\delta l_1 - (c_{81}a_{12} + c_{82}a_{22})\delta l_2 \\ & - (c_{81}a_{13} + c_{82}a_{23} + c_{85}a_{53} + c_{86}a_{63})\delta r_3 \\ & - (c_{81}a_{14} + c_{85}a_{54})\delta \alpha_1 - c_{82}a_{25}\delta b_1 + 0\delta l_3 + 0\delta l_4 + 0\delta l_5 \\ & + 0(\delta \alpha_2) + 0\delta b_2 - (c_{85}a_{5,11} + c_{86}a_{6,11})\delta l_6 \\ & - (c_{85}a_{5,12} + c_{86}a_{6,12})\delta l_7 - (c_{85}a_{5,13} + c_{87}a_{7,13})\delta \alpha_3 \\ & - c_{86}a_{6,14}\delta b_3 - (c_{87}a_{7,15} + c_{88}a_{8,15})\delta r_7 \\ & - (c_{87}a_{7,16} + c_{88}a_{8,16})\delta l_8 - (c_{87}a_{7,17} + c_{88}a_{8,17})\delta l_9 \\ & - c_{87}a_{7,18}\delta \alpha_4 - c_{88}a_{8,19}\delta b_4 \\ & - (c_{81}a_{1,20} + c_{82}a_{2,20} + c_{85}a_{5,20} + c_{86}a_{6,20})\delta \beta_1 \\ & - (c_{87}a_{7,21} + c_{88}a_{8,21})\delta \beta_2 + 0\delta l_{10} + 0\delta l_{11} + 0\delta \alpha_5 + 0\delta b_5 + \\ & 0\delta r_{11} + 0\delta l_{12} + 0\delta l_{13} + 0\delta \alpha_6 + 0\delta b_6 + 0\delta \beta_3 \\ & - (c_{81}a_{1,32} + c_{82}a_{2,32})\delta \rho_1 \quad (10) \end{aligned}$$

**1.6. Error posicional de la tercera cuchilla debido a las dilataciones térmicas**

De manera similar, el error posicional  $\delta \rho_{13}$  de la tercera cuchilla debido a las dilataciones térmicas puede ser escrito como se señala en (11).

$$\begin{aligned} \delta \rho_{13} = & - (c_{12,1}a_{11} + c_{12,2}a_{21})\delta l_1 - (c_{12,1}a_{12} + c_{12,2}a_{22})\delta l_2 \\ & - (c_{12,1}a_{13} + c_{12,2}a_{23} + c_{12,5}a_{53} + c_{12,6}a_{63})\delta r_3 \\ & - (c_{12,1}a_{14} + c_{12,5}a_{54})\delta \alpha_1 - c_{12,2}a_{25}\delta b_1 + 0\delta l_3 + 0\delta l_4 \\ & + 0\delta l_5 + 0(\delta \alpha_2) + 0\delta b_2 - (c_{12,5}a_{5,11} + c_{12,6}a_{6,11})\delta l_6 \\ & - (c_{12,5}a_{5,12} + c_{12,6}a_{6,12})\delta l_7 - (c_{12,5}a_{5,13})\delta \alpha_3 \\ & - c_{12,6}a_{6,14}\delta b_3 - 0\delta r_7 - 0\delta l_8 - 0\delta l_9 - 0\delta \alpha_4 + 0\delta b_4 \\ & - (c_{12,1}a_{1,20} + c_{12,2}a_{2,20} + c_{12,5}a_{5,20} + c_{12,6}a_{6,20})\delta \beta_1 \\ & - 0\delta \beta_2 - (c_{12,9}a_{9,22} + c_{12,10}a_{10,22})\delta l_{10} \\ & - (c_{12,9}a_{9,23} + c_{12,10}a_{10,23})\delta l_{11} \\ & - (c_{12,9}a_{9,24} + c_{12,11}a_{11,24})\delta \alpha_5 \\ & - c_{12,10}a_{10,25}\delta b_5 - (c_{12,11}a_{11,26} + c_{12,12}a_{12,26})\delta r_{11} \\ & - (c_{12,11}a_{11,27} + c_{12,12}a_{12,27})\delta l_{12} \\ & - (c_{12,11}a_{11,28} + c_{12,12}a_{12,28})\delta l_{13} - (c_{12,11}a_{11,29})\delta \alpha_6 \\ & - (c_{12,12}a_{12,30})\delta b_6 - (c_{12,9}a_{9,31} + c_{12,10}a_{10,31})\delta \beta_3 \\ & - (c_{12,1}a_{1,32} + c_{12,2}a_{2,32})\delta \rho_1; \quad (11) \end{aligned}$$

En la Figura 4, si una cuchilla cualquiera, la tercera por ejemplo (cuchilla numerada como 13), se retrasa un ángulo  $\delta \rho_{13}$  respecto a las cuchillas que ya han alcanzado la posición de ascenso vertical, entonces se creará una *interferencia horizontal* perjudicial de valor  $d - d'$ , entre el rodillo seguidor 16 de esta cuchilla y la leva fija sobre la cual se mueve este rodillo. La magnitud de esta interferencia depende de la geometría y viene dada por la ecuación (12). Debido a esta interferencia, el rodillo que marcha *retrasado* respecto a los demás, se incrusta contra la cara curva de la leva, en lugar de avanzar como las otras cuchillas ascendiendo sobre la cara plana, causando el atascamiento del mecanismo y sentando las bases para una eventual rotura.

Para las dimensiones nominales [4], del tren epicíclico de la figura 4, se puede decir que cuando  $\delta \rho_{13} = +0,70^\circ$  se alcanza una interferencia horizontal de  $d - d' = 1$  mm.

La relación entre el error angular  $\delta \rho_{13}$  respecto a la posición nominal vertical de la cuchilla 13, y la interferencia horizontal  $d - d'$  se puede calcular a partir de la figura 4, dando como resultado la ecuación (12),

$$d - d' = R \text{sen } \lambda - R \text{sen}(\lambda - \delta \rho_{13}); \quad (12)$$

En esta ecuación (12), la magnitud del ángulo  $\lambda$  es una constante igual a  $34^\circ$ , siendo además el radio R igual a 20

mm. El ángulo  $\lambda$  representa el ángulo entre la vertical negativa y la línea imaginaria que une el centro del nodo cinemático  $R'$  y el centro teórico del rodillo, cuando la cuchilla está perfectamente vertical y su rodillo se encuentra posicionado *sin interferencia* con la leva para iniciar el ascenso.

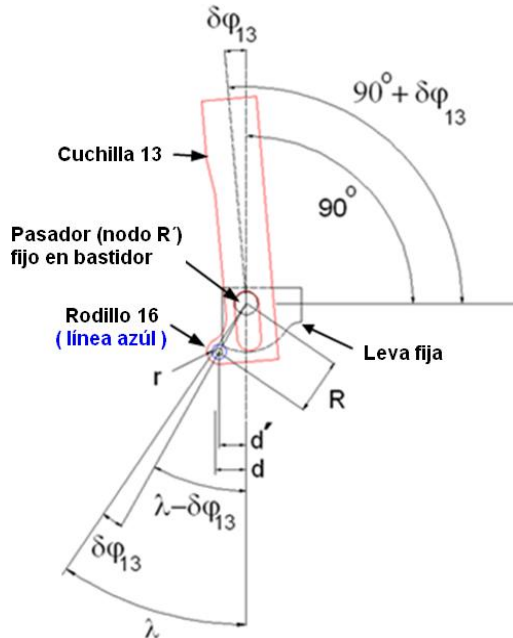


Figura 4. Geometría para el cálculo de la interferencia horizontal d-d'.

### III. RESULTADOS Y DISCUSIONES

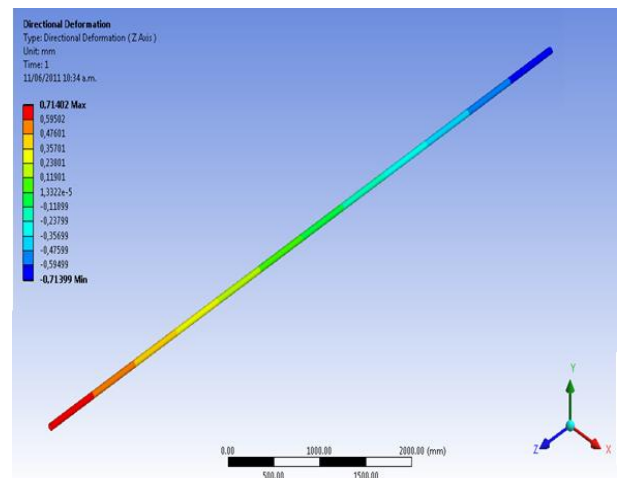
Los errores posicionales  $\delta\rho_5, \delta\rho_9, \delta\rho_{13}$  de cada una de las tres cuchillas de puesta a tierra, debido a las dilataciones térmicas de los eslabones del mecanismo, cuando las cuchillas arriban a sus posiciones verticales teóricas, pueden ser calculados usando un programa computacional escrito para tal fin. Para ello, de acuerdo con las ecuaciones (9), (10) y (11) es necesario tomar en cuenta en primer lugar, la longitud nominal de cada eslabón, las cuales pueden ser consultadas en el apéndice A. En segundo lugar, se debe conocer también la magnitud de la dilatación térmica asociada a cada uno de estos eslabones, las cuales se indican también en el apéndice A. La figura 5 muestra una corrida efectuada con un programa de elementos finitos que permite hallar la dilatación longitudinal del eslabón 10 del mecanismo, fabricado en Acero AISI 1045. De acuerdo con estos resultados, los eslabones más largos, esto es, los eslabones 10 y 6, (ambos de 7 m de longitud, hechos de acero y de igual sección transversal) son los que tienen mayor influencia en el error de posicionamiento de las cuchillas, al dilatarse en mayor medida que el resto de los eslabones. Este resultado arroja una dilatación longitudinal de 1,4280 mm para un gradiente de temperatura de 17°C. El apéndice A muestra una tabla con las dilataciones térmicas de todos los eslabones del mecanismo. Se ha considerado que el

bastidor no se dilata significativamente. Tampoco se ha tomado en cuenta, por su bajo valor relativo esperado, la influencia de la variación angular de los parámetros  $\beta_1, \beta_2$  y  $\beta_3$  en el error de posicionamiento de las cuchillas. Finalmente, el cálculo de los errores de posicionamiento de cada uno de las tres cuchillas alrededor de la posición vertical también depende de las relaciones geométricas existentes entre las coordenadas generalizadas de salida de las tres cuchillas y la coordenada de entrada  $\varphi_1$ . Estas relaciones se desarrollan en detalle en [4].

Si se hace esto se obtiene el conjunto de resultados dados en (13):

$$\delta\rho_5 = -0,34883; \delta\rho_{10} = +0,75072; \delta\rho_{13} = -1,12370; \quad (13)$$

Los signos negativos y positivos de estos resultados indican que debido a las dilataciones térmicas, la primera cuchilla y la tercera cuchilla se adelantan en su movimiento a la segunda, con lo que es esta segunda cuchilla la que potencialmente tenderá a atascarse.



$$\delta T_{Ac} = 1,4280 \text{ mm}$$

Figura 5. Dilatación del elemento más largo del mecanismo (longitud del elemento = 7 m).

Por otra parte, la diferencia entre los valores absolutos de los resultados dados en (13) se debe a que el error de posicionamiento de cada cuchilla crece conforme nos alejamos del elemento de entrada. Esto es así porque el error de posicionamiento de cada cuchilla, calculado a través de las ecuaciones (9), (10) y (11), depende cada vez de más parámetros geométricos a medida que nos alejamos del elemento de entrada.

De acuerdo con (12), los valores de  $\delta\rho_5, \delta\rho_{10}$  y  $\delta\rho_{13}$  generan una interferencia horizontal máxima de aproximadamente  $d - d' = 1 \text{ mm}$ , suficiente para producir un atasco no deseado del rodillo retrasado.



IV. CONCLUSIONES

1. La formulación de las doce ecuaciones diferenciales de restricción cinemática del mecanismo de puesta a tierra Hapam HAV-EV permite encontrar cómo las dilataciones térmicas afectan la calibración del mecanismo.
2. Un gradiente de temperatura de 17°C puede producir en una barra de acero de 7 m de longitud una dilatación longitudinal de aproximadamente 1,428 mm.
3. Los errores de posicionamiento esperados alrededor de la posición vertical de la primera, segunda y tercera cuchilla, debidos a las dilataciones térmicas en el mecanismo son: -0,34883°, +0,705072° y -1,12370 °, respectivamente.
4. La cuchilla que tiene durante su movimiento y debido a las dilataciones térmicas, una mayor tendencia a retrasarse respecto a las otras, es la segunda.
5. La interferencia horizontal esperada entre el rodillo de la segunda cuchilla y la leva que éste rodillo recorre, debido a las dilataciones térmicas es aproximadamente igual a 1 mm.
6. El mecanismo de puesta a tierra Hapam HAV-EV tiene una tendencia a trabarse cuando sus tres cuchillas alcanzan la posición vertical simultánea.

V. REFERENCIAS

1. Fogarasy A., and Smith M., “The case for a general method of kinematic analysis of plane mechanisms based on equations of constraint”. *Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. Proc. Instn. Mech. Engrs. **209**. pp. 337-343, United Kingdom, 1995.
2. Mendoza Jesús, and Otero Luis, “Influence of clearances on the positioning error of the discharge mechanism doors on a rail wagon”. ESDA2008-59320, Proc. 9th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, ASME, Haifa, Israel, 2008.
3. Fogarasy A., and Smith, M. “The influence of manufacturing tolerances on the kinematic performance of mechanisms”. *Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. Proc. Instn. Mech. Engrs. **209**. pp. 35-45, United Kingdom, 1998.
4. Mendoza Jesús, “Influencia de los errores dimensionales en la exactitud de posicionamiento del mecanismo de puesta a tierra de un seccionador eléctrico”. Trabajo de ascenso a la categoría de profesor titular. UNEXPO. Puerto Ordaz, Venezuela, 2010.
5. Mendoza Jesús, “Influencia de las tolerancias dimensionales y las holguras en la exactitud de posicionamiento de un mecanismo de cuatro barras”. Tesis de doctorado, CUJAE, La Habana, Cuba, 2003.
6. Mendoza Jesús, and Otero Luis, “Calibration of the tight seal of the discharge mechanism doors on a rail

wagon using adjustable members”. ESDA2006-95102, Proc. 8th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, ASME, Turin, Italy, 2006.

NOMENCLATURA

A, B, C, D, E, H, .....O', Q': Pares Cinemáticos

$a_i$  Longitud constante en la dirección x

$b_i$  Longitud constante en la dirección y

$\Phi_i$  Ecuación i-ésima de restricción cinemática

$l_i$  Longitud del eslabón i-ésimo

$p_i$  Parámetro geométrico i-ésimo

$\delta p_j$  Variación dimensional del parámetro geométrico j-ésimo.

$\delta q_1 = \delta \varphi_1$  Error posicional de la coordenada de entrada.

$q_i$  i-ésima coordenada generalizada.

$\delta q_i$  Error posicional del i-ésimo componente.

$\beta_i$  Ángulo constante i-ésimo.

$\varepsilon_{ij}$  Coeficiente de influencia de la variación longitudinal j-ésima sobre el parámetro geométrico i-ésimo (1/mm).

$E_{ij}$  Matriz de los coeficientes de influencia

$\varphi_i$  Orientación angular del eslabón i-ésimo.

$R$  Distancia entre el centro de un rodillo seguidor y el centro del pasador fijo que sirve para articular cada cuchilla al bastidor.

$r$  Radio del rodillo

$d$  Máxima distancia horizontal entre el centro de un rodillo y el centro del pasador fijo que sirve para articular cada cuchilla al bastidor.

$d'$  Distancia horizontal real entre el centro de un rodillo y el centro del pasador fijo que sirve para articular cada brazo al bastidor debido a un error  $\delta \varphi_i$  en el i-ésimo eslabón de salida.

$\lambda$  Ángulo entre la vertical negativa y la línea que une el centro del pasador fijo que articula cada brazo al bastidor con el centro del rodillo, cuando el rodillo se encuentra idealmente posicionado para iniciar el ascenso.



**APÉNDICE A**

**Tabla I. Dimensiones nominales de los parámetros geométricos del mecanismo y dilataciones térmicas esperadas para estos parámetros si se da un gradiente de temperatura 17°C.**

Parámet	Dimensión nominal	Dilatación térmica
$l_1$	400 mm	0,0816 mm
$l_2$	350 mm	0,0714 mm
$r_3$	180 mm	0,0367 mm
$a_1$	500 mm	0 (Bastidor)
$b_1$	0 mm	0 (Bastidor)
$l_3$	250 mm	0,0510 mm
$l_4$	165 mm	0,0367 mm
$l_5$	245 mm	0,0499 mm
$a_2$	560 mm	0 (Bastidor)
$b_2$	104 mm	0 (Bastidor)
$l_6$	7000 mm	1,428 mm
$l_7$	180 mm	0,0367 mm
$a_3$	7500 mm	0 (Bastidor)
$b_3$	0 mm	0 (Bastidor)
$r_7$	250 mm	0,0510 mm
$l_8$	165 mm	0,0367 mm
$l_9$	245 mm	0,0499 mm
$a_4$	7560 mm	0 (Bastidor)
$b_4$	104 mm	0 (Bastidor)
$\beta_1$	300 grados	No considerado
$\beta_2$	210 grados	No considerado
$l_{10}$	7000 mm	1,428 mm
$l_{11}$	180 mm	0,0367 mm
$a_5$	14500 mm	0 (Bastidor)
$b_5$	0 mm	0 (Bastidor)
$r_{11}$	250 mm	0,0510 mm
$l_{12}$	165 mm	0,040 mm
$l_{13}$	245 mm	0,0367 mm
$a_6$	14560 mm	0 (Bastidor)
$b_6$	104 mm	0 (Bastidor)
$\beta_3$	300 grados	No considerado



Sexta fila

$$a_{6,3} = \text{sen}(\varphi_3 + \beta_1); \quad a_{6,11} = \sin \varphi_6; \quad a_{6,12} = -\sin \varphi_7; \quad a_{6,14} = 1; \quad a_{6,20} = r_3 \cos(\varphi_3 + \beta_1);$$

Séptima Fila

$$a_{7,13} = -1; \quad a_{7,15} = \cos(\varphi_7 + \beta_2); \quad a_{7,16} = \cos \varphi_8; \quad a_{7,17} = -\cos \varphi_9; \quad a_{7,18} = 1; \\ a_{7,21} = -r_7 \sin(\varphi_7 + \beta_2);$$

Octava fila

$$a_{8,15} = \text{sen}(\varphi_7 + \beta_2); \quad a_{8,16} = \sin \varphi_8; \quad a_{8,17} = -\sin \varphi_9; \quad a_{8,19} = -1; \quad a_{8,21} = r_7 \cos(\varphi_7 + \beta_2);$$

Novena fila

$$a_{9,22} = \cos \varphi_{10}; \quad a_{9,23} = -\cos(\varphi_{11} + \beta_3); \quad a_{9,24} = -1 \quad a_{9,31} = l_{11} \sin(\varphi_{11} + \beta_3);$$

Décima fila

$$a_{10,22} = \sin \varphi_{10}; \quad a_{10,23} = -\sin(\varphi_{11} + \beta_3); \quad a_{10,25} = 1; \quad a_{10,31} = -l_{11} \cos(\varphi_{11} + \beta_3);$$

Undécima fila

$$a_{11,24} = 1; \quad a_{11,26} = \cos \varphi_{11}; \quad a_{11,27} = \cos \varphi_{12}; \quad a_{11,28} = -\cos \varphi_{13}; \quad a_{11,29} = -1;$$

Duodécima fila

$$a_{12,26} = \sin \varphi_{11}; \quad a_{12,27} = \sin \varphi_{12}; \quad a_{12,28} = -\sin \varphi_{13}; \quad a_{12,30} = -1$$

APÉNDICE C

Matriz [B]

$$[B] = \left[ \frac{\partial \Phi_k}{\partial q_i} \right]$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{52} & 0 & 0 & b_{55} & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{62} & 0 & 0 & b_{65} & b_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{76} & b_{77} & b_{78} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{86} & b_{87} & b_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{96} & 0 & 0 & b_{99} & b_{9,10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{10,6} & 0 & 0 & b_{10,9} & b_{10,10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{11,10} & b_{11,11} & b_{11,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{12,10} & b_{12,11} & b_{12,12} \end{bmatrix}_{12 \times 12}$$

Siendo:

$$\begin{aligned} b_{11} &= -l_2 \sin \varphi_2 & b_{12} &= r_3 \sin(\varphi_3 + \beta_1) \\ b_{21} &= l_2 \cos \varphi_2 & b_{22} &= -r_3 \cos(\varphi_3 + \beta_1) \\ b_{32} &= -l_3 \sin \varphi_3 & b_{33} &= -l_4 \sin \varphi_4 & b_{34} &= l_5 \sin \varphi_5 \\ b_{42} &= l_3 \cos \varphi_3 & b_{43} &= l_4 \cos \varphi_4 & b_{44} &= -l_5 \cos \varphi_5 \\ b_{52} &= -r_3 \sin(\varphi_3 + \beta_1) & b_{55} &= -l_6 \sin \varphi_6 & b_{56} &= l_7 \sin \varphi_7 \\ b_{62} &= r_3 \cos(\varphi_3 + \beta_1) & b_{65} &= l_6 \cos \varphi_6 & b_{66} &= -l_7 \cos \varphi_7 \\ b_{76} &= -r_7 \sin(\varphi_7 + \beta_2) & b_{77} &= -l_8 \sin \varphi_8 & b_{78} &= l_9 \sin \varphi_9 \\ b_{86} &= r_7 \cos(\varphi_7 + \beta_2) & b_{87} &= l_8 \cos \varphi_8 & b_{88} &= -l_9 \cos \varphi_9 \\ b_{96} &= -l_7 \sin \varphi_7 & b_{99} &= -l_{10} \sin \varphi_{10} & b_{9,10} &= l_{11} \sin(\varphi_{11} + \beta_3) \\ b_{10,6} &= l_7 \cos \varphi_7 & b_{10,9} &= l_{10} \cos \varphi_{10} & b_{10,10} &= -l_{11} \cos(\varphi_{11} + \beta_3) \\ b_{11,10} &= -r_{11} \sin \varphi_{11} & b_{11,11} &= -l_{12} \sin \varphi_{12} & b_{11,12} &= l_{13} \sin \varphi_{13} \\ b_{12,10} &= r_{11} \cos \varphi_{11} & b_{12,11} &= l_{12} \cos \varphi_{12} & b_{12,12} &= -l_{13} \cos \varphi_{13} \end{aligned}$$

APÉNDICE D

Matriz [B]<sup>-1</sup>

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & 0 & 0 & c_{55} & c_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{61} & c_{62} & 0 & 0 & c_{65} & c_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{71} & c_{72} & 0 & 0 & c_{75} & c_{76} & c_{77} & c_{78} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{81} & c_{82} & 0 & 0 & c_{85} & c_{86} & c_{87} & c_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{91} & c_{92} & 0 & 0 & c_{95} & c_{96} & 0 & 0 & c_{9,9} & c_{9,10} & 0 & 0 \\ c_{10,1} & c_{10,2} & 0 & 0 & c_{10,5} & c_{10,6} & 0 & 0 & c_{10,9} & c_{10,10} & 0 & 0 \\ c_{11,1} & c_{11,2} & 0 & 0 & c_{11,5} & c_{11,6} & 0 & 0 & c_{11,9} & c_{11,10} & c_{11,11} & c_{11,12} \\ c_{12,1} & c_{12,2} & 0 & 0 & c_{12,5} & c_{12,6} & 0 & 0 & c_{12,9} & c_{12,10} & c_{12,11} & c_{12,12} \end{bmatrix}$$

Términos de la primera columna de la matriz [B]<sup>-1</sup>

$$c_{11} = \frac{\cos(\varphi_3 + \beta_1)}{l_2 \text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2)}; \quad c_{21} = \frac{\cos \varphi_2}{r_3 \text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2)}$$

$$c_{31} = \frac{-l_3 \cos(\varphi_2) \text{sen}(\varphi_5 - \varphi_3)}{r_3 l_4 \text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2) \text{sen}(\varphi_5 - \varphi_4)}$$

$$c_{41} = \frac{-l_3 \cos(\varphi_2) \text{sen}(\varphi_4 - \varphi_3)}{r_3 l_5 \text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2) \text{sen}(\varphi_5 - \varphi_4)}$$

$$c_{51} = \frac{\cos(\varphi_2) \text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_7)}{l_6 \text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2) \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6)}$$

$$c_{61} = \frac{\cos(\varphi_2) \text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_6)}{l_7 \text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2) \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6)}$$

$$c_{71} = \frac{r_7 \cos(\varphi_2) \text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_6) \text{sen}(\varphi_7 + \beta_2 - \varphi_9)}{l_7 l_8 \text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2) \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \text{sen}(\varphi_9 - \varphi_8)}$$

$$c_{81} = \frac{r_7 \cos(\varphi_2) \text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_6) \text{sen}(\varphi_7 + \beta_2 - \varphi_8)}{l_7 l_9 \text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2) \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \text{sen}(\varphi_9 - \varphi_8)}$$

$$c_{91} = \frac{-\cos(\varphi_2) \text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_6) \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_7)}{l_{10} \text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2) \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10})}$$

$$c_{10,1} = \frac{-\cos(\varphi_2)\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_6)\text{sen}(\varphi_{10} - \varphi_7)}{l_{11}\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2)\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6)\text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10})}$$

$$c_{11,1} = \frac{-r_{11}\cos(\varphi_2)\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_6)\text{sen}(\varphi_{10} - \varphi_7)\text{sen}(\varphi_{13} - \varphi_{11})}{l_{11}l_{12}\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2)\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6)\text{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{13})}$$

$$c_{12,1} = \frac{-r_{11}\cos(\varphi_2)\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_6)\text{sen}(\varphi_{10} - \varphi_7)\text{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{11})}{l_{11}l_{13}\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2)\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6)\text{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{13})}$$

**Términos de la segunda columna de la matriz [B]<sup>-1</sup>**

$$c_{12} = \frac{\sin(\varphi_3 + \beta_1)}{l_2\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2)}; \quad c_{22} = \frac{\sin \varphi_2}{r_3\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2)}$$

$$c_{32} = \frac{-l_3 \sin(\varphi_2)\text{sen}(\varphi_5 - \varphi_3)}{r_3l_4\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2)\text{sen}(\varphi_5 - \varphi_4)}$$

$$c_{42} = \frac{-l_3 \sin(\varphi_2)\text{sen}(\varphi_4 - \varphi_3)}{r_3l_5\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2)\text{sen}(\varphi_5 - \varphi_4)}$$

$$c_{52} = \frac{\sin(\varphi_2)\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_7)}{l_6\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2)\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6)}$$

$$c_{62} = \frac{\sin(\varphi_2)\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_6)}{l_7\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2)\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6)}$$

$$c_{72} = \frac{r_7 \sin(\varphi_2)\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_6)\text{sen}(\varphi_7 + \beta_2 - \varphi_9)}{l_7l_8\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2)\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6)\text{sen}(\varphi_9 - \varphi_8)}$$

$$c_{82} = \frac{r_7 \sin(\varphi_2)\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_6)\text{sen}(\varphi_7 + \beta_2 - \varphi_8)}{l_7l_9\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2)\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6)\text{sen}(\varphi_9 - \varphi_8)}$$

$$c_{92} = \frac{-\sin(\varphi_2)\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_6)\text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_7)}{l_{10}\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2)\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6)\text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10})}$$

$$c_{10,2} = \frac{-\sin(\varphi_2)\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_6)\text{sen}(\varphi_{10} - \varphi_7)}{l_{11}\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2)\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6)\text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10})}$$

$$c_{11,2} = \frac{-r_{11}\sin(\varphi_2)\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_6)\text{sen}(\varphi_{10} - \varphi_7)\text{sen}(\varphi_{13} - \varphi_{11})}{l_{11}l_{12}\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2)\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6)\text{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{13})}$$

$$c_{12,2} = \frac{-r_{11}\sin(\varphi_2)\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_6)\text{sen}(\varphi_{10} - \varphi_7)\text{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{11})}{l_{11}l_{13}\text{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2)\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6)\text{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{13})}$$

**Términos de la tercera columna de la matriz [B]<sup>-1</sup>**

$$c_{33} = \frac{\cos(\varphi_5)}{l_4\text{sen}(\varphi_5 - \varphi_4)}$$

$$c_{43} = \frac{\cos(\varphi_4)}{l_5\text{sen}(\varphi_5 - \varphi_4)}$$

$$c_{34} = \frac{\sin(\varphi_5)}{l_4\text{sen}(\varphi_5 - \varphi_4)}$$

$$c_{44} = \frac{\sin(\varphi_4)}{l_5\text{sen}(\varphi_5 - \varphi_4)}$$

**Términos de la cuarta columna de la matriz [B]<sup>-1</sup>**

**Términos de la quinta columna de la matriz [B]<sup>-1</sup>**

$$c_{55} = \frac{\cos(\varphi_7)}{l_6 \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6)}$$

$$c_{65} = \frac{\cos(\varphi_6)}{l_7 \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6)}$$

$$c_{75} = \frac{r_7 \cos(\varphi_6) \text{sen}(\varphi_7 + \beta_2 - \varphi_9)}{l_7 l_8 \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \text{sen}(\varphi_9 - \varphi_8)}$$

$$c_{85} = \frac{r_7 \cos(\varphi_6) \text{sen}(\varphi_7 + \beta_2 - \varphi_8)}{l_7 l_9 \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \text{sen}(\varphi_9 - \varphi_8)}$$

$$c_{95} = \frac{\cos(\varphi_6) \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_7)}{l_{10} \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10})}$$

$$c_{10,5} = \frac{\cos(\varphi_6) \text{sen}(\varphi_{10} - \varphi_7)}{l_{11} \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10})}$$

$$c_{11,5} = \frac{r_{11} \cos(\varphi_6) \text{sen}(\varphi_{10} - \varphi_7) \sin(\varphi_{13} - \varphi_{11})}{l_{11} l_{12} \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10}) \sin(\varphi_{13} - \varphi_{12})}$$

$$c_{12,5} = \frac{r_{11} \cos(\varphi_6) \text{sen}(\varphi_{10} - \varphi_7) \sin(\varphi_{12} - \varphi_{11})}{l_{11} l_{13} \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10}) \sin(\varphi_{13} - \varphi_{12})}$$

**Términos de la sexta columna de la matriz [B]<sup>-1</sup>**

$$c_{56} = \frac{\sin(\varphi_7)}{l_6 \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6)}$$

$$c_{66} = \frac{\sin(\varphi_6)}{l_7 \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6)}$$

$$c_{76} = \frac{r_7 \sin(\varphi_6) \text{sen}(\varphi_7 + \beta_2 - \varphi_9)}{l_7 l_8 \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \text{sen}(\varphi_9 - \varphi_8)}$$

$$c_{86} = \frac{r_7 \sin(\varphi_6) \text{sen}(\varphi_7 + \beta_2 - \varphi_8)}{l_7 l_9 \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \text{sen}(\varphi_9 - \varphi_8)}$$

$$c_{96} = \frac{\sin(\varphi_6) \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_7)}{l_{10} \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10})}$$

$$c_{10,6} = \frac{\sin(\varphi_6) \text{sen}(\varphi_{10} - \varphi_7)}{l_{11} \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10})}$$



$$c_{11,6} = \frac{r_{11} \sin(\varphi_6) \text{sen}(\varphi_{10} - \varphi_7) \sin(\varphi_{13} - \varphi_{11})}{l_{11} l_{12} \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10}) \sin(\varphi_{13} - \varphi_{12})}$$

$$c_{12,6} = \frac{r_{11} \sin(\varphi_6) \text{sen}(\varphi_{10} - \varphi_7) \sin(\varphi_{12} - \varphi_{11})}{l_{11} l_{13} \text{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10}) \sin(\varphi_{13} - \varphi_{12})}$$

**Términos de la séptima columna de la matriz [B]<sup>-1</sup>**

$$c_{77} = \frac{\cos(\varphi_9)}{l_8 \text{sen}(\varphi_9 - \varphi_8)}$$

$$c_{87} = \frac{\cos(\varphi_8)}{l_9 \text{sen}(\varphi_9 - \varphi_8)}$$

**Términos de la octava columna de la matriz [B]<sup>-1</sup>**

$$c_{78} = \frac{\sin(\varphi_9)}{l_8 \text{sen}(\varphi_9 - \varphi_8)}$$

$$c_{88} = \frac{\sin(\varphi_8)}{l_9 \text{sen}(\varphi_9 - \varphi_8)}$$

**Términos de la novena columna de la matriz [B]<sup>-1</sup>**

$$c_{9,9} = \frac{\cos(\varphi_{11} + \beta_3)}{l_{10} \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10})}$$

$$c_{10,9} = \frac{\cos(\varphi_{10})}{l_{11} \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10})}$$

$$c_{11,9} = \frac{r_{11} \cos(\varphi_{10}) \sin(\varphi_{13} - \varphi_{11})}{l_{11} l_{12} \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10}) \text{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{13})}$$

$$c_{12,9} = \frac{r_{11} \cos(\varphi_{10}) \sin(\varphi_{12} - \varphi_{11})}{l_{11} l_{13} \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10}) \text{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{13})}$$

**Términos de la décima columna de la matriz [B]<sup>-1</sup>**

$$c_{9,10} = \frac{\sin(\varphi_{11} + \beta_3)}{l_{10} \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10})}$$

$$c_{10,10} = \frac{\sin(\varphi_{10})}{l_{11} \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10})}$$

$$c_{11,10} = \frac{r_{11} \sin(\varphi_{10}) \sin(\varphi_{13} - \varphi_{11})}{l_{11} l_{12} \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10}) \text{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{13})}$$

$$c_{12,10} = \frac{r_{11} \sin(\varphi_{10}) \sin(\varphi_{12} - \varphi_{11})}{l_{11} l_{13} \text{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10}) \text{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{13})}$$

**Términos de la undécima columna de la matriz [B]<sup>-1</sup>**

$$c_{11,11} = \frac{\cos(\varphi_{13})}{l_{12} \text{sen}(\varphi_{13} - \varphi_{12})}$$

$$c_{12,11} = \frac{\cos(\varphi_{12})}{l_{13} \text{sen}(\varphi_{13} - \varphi_{12})}$$

**Términos de la duodécima columna de la matriz [B]<sup>-1</sup>**

$$c_{11,12} = \frac{\text{sen}(\varphi_{13})}{l_{12} \text{sen}(\varphi_{13} - \varphi_{12})}$$

$$c_{12,12} = \frac{\text{sen}(\varphi_{12})}{l_{13} \text{sen}(\varphi_{13} - \varphi_{12})}$$

APÉNDICE E

Los términos de las ecuaciones (13), (14) y (15) son:

$$a_{12} = \cos \varphi_2; \quad a_{22} = \operatorname{sen} \varphi_2$$

$$c_{41} = \frac{-l_3 \cos(\varphi_2) \operatorname{sen}(\varphi_4 - \varphi_3)}{r_3 l_5 \operatorname{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2) \operatorname{sen}(\varphi_5 - \varphi_4)}$$

$$c_{42} = \frac{-l_3 \sin(\varphi_2) \operatorname{sen}(\varphi_4 - \varphi_3)}{r_3 l_5 \operatorname{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2) \operatorname{sen}(\varphi_5 - \varphi_4)}$$

$$c_{81} = \frac{r_7 \cos(\varphi_2) \operatorname{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_6) \operatorname{sen}(\varphi_7 + \beta_2 - \varphi_8)}{l_7 l_9 \operatorname{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2) \operatorname{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \operatorname{sen}(\varphi_9 - \varphi_8)}$$

$$c_{82} = \frac{r_7 \sin(\varphi_2) \operatorname{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_6) \operatorname{sen}(\varphi_7 + \beta_2 - \varphi_8)}{l_7 l_9 \operatorname{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2) \operatorname{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \operatorname{sen}(\varphi_9 - \varphi_8)}$$

$$c_{85} = \frac{r_7 \cos(\varphi_6) \operatorname{sen}(\varphi_7 + \beta_2 - \varphi_8)}{l_7 l_9 \operatorname{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \operatorname{sen}(\varphi_9 - \varphi_8)}$$

$$c_{86} = \frac{r_7 \sin(\varphi_6) \operatorname{sen}(\varphi_7 + \beta_2 - \varphi_8)}{l_7 l_9 \operatorname{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \operatorname{sen}(\varphi_9 - \varphi_8)}$$

$$a_{5,11} = \cos \varphi_6$$

$$a_{6,11} = \sin \varphi_6$$

$$c_{12,1} = \frac{-r_{11} \cos(\varphi_2) \operatorname{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_6) \operatorname{sen}(\varphi_{10} - \varphi_7) \operatorname{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{11})}{l_{11} l_{13} \operatorname{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2) \operatorname{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \operatorname{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{13})}$$

$$c_{12,2} = \frac{-r_{11} \sin(\varphi_2) \operatorname{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_6) \operatorname{sen}(\varphi_{10} - \varphi_7) \operatorname{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{11})}{l_{11} l_{13} \operatorname{sen}(\varphi_3 + \beta_1 - \varphi_2) \operatorname{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \operatorname{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{13})}$$

$$c_{12,5} = \frac{r_{11} \cos(\varphi_6) \operatorname{sen}(\varphi_{10} - \varphi_7) \operatorname{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{11})}{l_{11} l_{13} \operatorname{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \operatorname{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10}) \operatorname{sen}(\varphi_{13} - \varphi_{12})}$$

$$c_{12,6} = \frac{r_{11} \sin(\varphi_6) \operatorname{sen}(\varphi_{10} - \varphi_7) \operatorname{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{11})}{l_{11} l_{13} \operatorname{sen}(\varphi_7 - \varphi_6) \operatorname{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10}) \operatorname{sen}(\varphi_{13} - \varphi_{12})}$$

$$c_{12,9} = \frac{r_{11} \cos(\varphi_{10}) \operatorname{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{11})}{l_{11} l_{13} \operatorname{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10}) \operatorname{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{13})}$$

$$c_{12,10} = \frac{r_{11} \sin(\varphi_{10}) \operatorname{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{11})}{l_{11} l_{13} \operatorname{sen}(\varphi_{11} + \beta_3 - \varphi_{10}) \operatorname{sen}(\varphi_{12} - \varphi_{13})}$$

$$a_{9,22} = \cos \varphi_{10} \quad a_{10,22} = \sin \varphi_{10}$$