

MODELADO CON VARIABLES ALEATORIAS EN SIMULINK UTILIZANDO SIMULACION MONTECARLO

Velásquez, Sergio¹ Velásquez, Ronny¹

(Recibido enero 2012, Aceptado junio 2012)

¹ Dpto. de Ingeniería Electrónica, UNEXPO Vicerrectorado Puerto Ordaz
sergiovelasquez@gmail.com;

Resumen: Este artículo presenta el Modelado Con Variables Aleatorias En Simulink Utilizando Simulación Montecarlo, muchos modelos de sistemas reales contienen elementos que precisan o admiten un modelado estadístico, Sistemas de comunicaciones, Sistemas de conmutación, Sistemas sensores, Modelado toma forma definiendo, Variables aleatorias que rigen ciertos comportamientos del sistema Procesos estocásticos para modelar variación de entradas en el tiempo, como lo son las fluctuaciones en la bolsa de valores e ciertos productos. Se deben definir métodos para generar muestras de variables aleatorias y muestras de procesos estocásticos. Entre ellos está el método de Montecarlo, el modelo implementado mostro la capacidad proponer precios optativos al precio de mercado ante cambios en el precio de un producto. Las simulaciones permitieron conocer con mayor exactitud la versatilidad del Método ante otros Métodos usados, prediciendo con gran exactitud las fluctuaciones de precios ocurridas en el producto de prueba.

Palabras clave: Simulink/ MonteCarlo/ Vainilla/ Gaussiano/ Modelo.

MODELING WITH RANDOM VARIABLES IN SIMULINK USING MONTECARLO SIMULATIONS

Abstract: This article presents the model with random variables in Monte Carlo Simulation Using Simulink, many models of real systems contain elements that require or permit a statistical modeling, communication systems, switching systems, sensor systems, modeling takes definite shape, random variables governing certain stochastic processes system behavior modeling inputs change over time, as are the fluctuations in the stock market and some products. You must define methods to generate samples of random variables and stochastic samples. Among them is the Monte Carlo method, the implemented model showed the ability to propose optional pricing to the market price to changes in the price of a product. The simulations allowed to know more precisely the versatility of the method to other methods used, predicting with great accuracy the price fluctuations that occurred in the trial product.

Keywords: Simulink/ MonteCarlo/ Vanilla/ Gaussian/ Model.

I. INTRODUCCION

Simulación de sistemas dinámicos, donde se supone que conocemos el valor exacto de todos los parámetros del modelo no representa adecuadamente el mundo real. La mayoría de las veces el diseñador de un sistema quiere saber lo que ocurre cuando uno o más componentes están sujetos a la incertidumbre.

El modelado de la incertidumbre cubre dos temas relacionados: variables aleatorias y los procesos estocásticos. Las variables aleatorias pueden modelar la incertidumbre en los experimentos en un solo evento se produce, lo que resulta en un valor numérico para algunos observables. Un ejemplo de esto ser el valor de un parámetro (o varios parámetros) especificado en el diseño.

En el proceso de construcción del sistema, estos pueden cambiar al azar debido a la fabricación u otros errores. Simulink ofrece los bloques que se pueden utilizar para

modelar variables aleatorias con las dos distribuciones estándar de probabilidad: uniforme y de Gauss o normal. Procesos estocásticos, en contraste con variables aleatorias, son funciones del tiempo o alguna otra variable independiente (o variables). La matemática de estos procesos es un poco más complicada debido a la interrelación entre el azar y la variable independiente.

En este artículo se analiza el uso de Simulink para modelar los dos tipos de incertidumbre. Se presenta los dos tipos de variables aleatorias disponibles en Simulink y se muestra cómo crear otras distribuciones de probabilidad para su uso en los fenómenos de modelado que son más complejas. Se hace llegar las ideas de variables aleatorias para el más simple de procesos estocásticos, donde en cada uno de los tiempos de la muestra en un sistema discreto se selecciona una nueva variable aleatoria. Finalmente, se muestran los procesos

de tiempo discreto, que concurren a los procesos de tiempo continuo en el límite donde los intervalos de tiempo son cada vez más pequeños. [1].

II. DESARROLLO

La forma más sencilla de incertidumbre que se podría necesitar para el modelo son los valores de los parámetros de una simulación. Estas incertidumbres de los parámetros pueden ser los errores debidos a las tolerancias de fabricación, las incertidumbres en los valores físicos, debido a errores de medición y los errores en los parámetros del modelo por el desgaste del sistema.

Simulaciones de Monte Carlo utilizan los parámetros entre las distribuciones de probabilidad conocida. Los parámetros son entonces variables aleatorias, por lo que cada simulación más simple incertidumbres uno que tenga que modelo son los valores de los parámetros de una simulación.

Estas incertidumbres de los parámetros pueden ser los errores debidos alas tolerancias de fabricación, las incertidumbres en los valores físicos, debido a errores de medición y los errores en los parámetros del modelo por el desgaste del sistema. Simulaciones de Monte Carlo utilizan los parámetros entre las distribuciones de probabilidad conocida.

Los parámetros son entonces variables aleatorias, (por lo que cada uno tiene una estructura de simulación.)

1. El azar

Es una causalidad presente en diversos fenómenos que se caracterizan por causas complejas y no lineales. Dependiendo del ámbito al que se aplique, se pueden distinguir cuatro tipos de azar:

1.1. Azar en Matemáticas.

En matemáticas, pueden existir series numéricas con la propiedad de no poder ser obtenidas mediante un algoritmo más corto que la serie misma. Es lo que se conoce como aleatoriedad. La rama de las matemáticas que estudia este tipo de objetos es la teoría de la probabilidad. Cuando esta teoría se aplica a fenómenos reales se prefiere hablar de estadística.

1.2. Azar en la Física.

Los sistemas de la física pueden incluir procesos deterministas y también indeterministas, es decir azarosos. En los sistemas indeterministas no se puede determinar de antemano cuál será el suceso siguiente, como sucede en la desintegración de un núcleo atómico. Esta dinámica, azarosa, es intrínseca a los procesos que estudia la mecánica cuántica, es decir aquellos subatómicos. Dentro de los procesos deterministas, también se da el azar en la dinámica de sistemas complejos impredecibles, también conocidos como sistemas caóticos.

1.3. Azar en Biología.

Las mutaciones genéticas son generadas por el azar. Las mutaciones se conservan en el acervo genético, aumentando así las oportunidades de supervivencia y reproducción que los genes mutados confieren a los individuos que los poseen. Normalmente las características de un organismo se deben a la genética y al entorno, pero también las recombinaciones genéticas son obra del azar.

1.4. Azar como encuentro accidental

Esta situación se considera azar porque los procesos que coinciden son independientes, no hay relación causal entre ellos, aunque cada uno tenga una causa que actúe de modo necesario. Así, un macetero cae por una causa necesaria: la gravedad; pero es azaroso que en su trayectoria coincida con un peatón.

2. La probabilidad

La teoría de la probabilidad es la parte de las matemáticas que estudia los fenómenos aleatorios. Estos deben contraponerse a los fenómenos determinísticos, los cuales son resultados únicos y/o previsible de experimentos realizados bajo las mismas condiciones determinadas, por ejemplo, si se calienta agua a 100 grados Celsius a nivel del mar se obtendrá vapor. Los fenómenos aleatorios, por el contrario, son aquellos que se obtienen como resultado de experimentos realizados, otra vez, bajo las mismas condiciones determinadas pero como resultado posible poseen un conjunto de alternativas, por ejemplo, el lanzamiento de un dado o de un dardo.

3. Variable aleatoria

Una variable es aleatoria si su valor está determinado por el azar. En gran número de experimentos aleatorios es necesario, para su tratamiento matemático, cuantificar los resultados de modo que se asigne un número real a cada uno de los resultados posibles del experimento. De este modo se establece una relación funcional entre elementos del espacio muestral asociado al experimento y números reales.

Una variable aleatoria (variable aleatoria) X es una función real definida en el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio, Ω

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

Se llama rango de una variable aleatoria X y lo denotaremos R_x , al conjunto de los valores reales que ésta puede tomar, según la aplicación X . Dicho de otro modo, el rango de una variable aleatoria es el recorrido de la función por la que ésta queda definida:

$$R_x = \{x \in \mathbb{R} | \exists \omega \in \Omega: X(\omega) = x\} \quad (2)$$

3.1. Distribución de probabilidad

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria X , también llamada función de distribución de X es la función $F_X(x)$, que asigna a cada evento definido sobre X una probabilidad dada por la siguiente expresión:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (3)$$

y de manera que se cumplan las siguientes tres condiciones:

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
2. Es continua por la derecha.
3. Es monótona no decreciente.

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria describe teóricamente la forma en que varían los resultados de un experimento aleatorio. Intuitivamente se trataría de una lista de los resultados posibles de un experimento con las probabilidades que se esperarían ver asociadas con cada resultado.

4. Proceso estocástico

En estadística, y específicamente en la teoría de la probabilidad, un proceso estocástico es un concepto matemático que sirve para caracterizar una sucesión de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo. Cada una de las variables aleatorias del proceso tiene su propia función de distribución de probabilidad y, entre ellas, pueden estar correlacionadas o no.

Cada variable o conjunto de variables sometidas a influencias o impactos aleatorios constituye un proceso estocástico.

Un proceso estocástico se puede definir equivalentemente de dos formas diferentes:

Como un conjunto de realizaciones temporales y un índice aleatorio que selecciona una de ellas.

Como un conjunto de variables aleatorias X_t indexadas por un índice t , dado que t pertenece a T , con $t \in T$.

T puede ser continuo si es un intervalo (el número de sus valores es ilimitado) o discreto si es numerable (solamente puede asumir determinados valores). Las variables aleatorias X_t toman valores en un conjunto que se denomina espacio probabilístico. Sea (Ω, B, P) un espacio probabilístico. En una muestra aleatoria de tamaño n se observa un suceso compuesto E formado por sucesos elementales ω :

$$E = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \subset \Omega \quad (4)$$

de manera que $E \in B$.

El suceso compuesto es un subconjunto contenido en el espacio muestral y es un álgebra de Boole B . A cada suceso ω le corresponde un valor de una variable aleatoria V , de manera que V es función de ω :

$$V = V(\omega); \omega \in \Omega, -\infty < V < \infty \quad (5)$$

El dominio de esta función o sea el campo de variabilidad del suceso elemental, es el espacio muestral, y su recorrido, o sea el de la variable aleatoria, es el campo de los números reales. Se llama proceso aleatorio al valor en (A, A) de un elemento $X = (\Omega, B, (X_t)_{t \geq 0}, P)$, donde para todo $t \in \mathbb{R}$, X_t es una variable aleatoria del valor en (A, A) .

Si se observa el suceso ω en un momento t de tiempo:

$$V = V(\omega, t); \omega \in \Omega, t \in T, -\infty < V < \infty \quad (6)$$

V define así un proceso estocástico.

Si $(B_t)_t$ es una *filtración*, se llama proceso aleatorio adaptado, al valor en (A, A) , de un elemento $X = (\omega, B, B_t, (X_t)_t, P)$, donde X_t es una variable aleatoria B_t -medible del valor en (A, A) . La función

$$\mathbb{R} \rightarrow A: t \mapsto X_t(\omega) \quad (7)$$

se llama la trayectoria asociada al suceso ω .

5. El método de Montecarlo

El método de Montecarlo es un método no determinístico o estadístico numérico, usado para aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud. El método se llamó así en referencia al Casino de Montecarlo (Principado de Mónaco) por ser "la capital del juego de azar", al ser la ruleta un generador simple de números aleatorios. El nombre y el desarrollo sistemático de los métodos de Montecarlo datan aproximadamente de 1944 y se mejoraron enormemente con el desarrollo de la computadora.

El uso de los métodos de Montecarlo como herramienta de investigación, proviene del trabajo realizado en el desarrollo de la bomba atómica durante la Segunda Guerra Mundial en el Laboratorio en EE.UU. Este trabajo conllevaba la simulación de problemas probabilísticos de hidrodinámica concernientes a la difusión de neutrones en el material de fisión. Esta difusión posee un comportamiento eminentemente aleatorio.

En la actualidad es parte fundamental de los algoritmos de Raytracing para la generación de imágenes 3D.

En la primera etapa de estas investigaciones, John von Neumann y Stanislaw Ulam refinaron esta ruleta rusa y los métodos "de división" de tareas. Sin embargo, el desarrollo sistemático de estas ideas tuvo que esperar al trabajo de Harris y Herman Kahn en 1948. [2].

Aproximadamente en el mismo año, Enrico Fermi, Nicholas Metropolis y Ulam obtuvieron estimadores para los valores característicos de la ecuación de Schrödinger para la captura de neutrones a nivel nuclear usando este método.

El método de Montecarlo proporciona soluciones aproximadas a una gran variedad de problemas matemáticos posibilitando la realización de experimentos

con muestreos de números pseudoaleatorios en una computadora. El método es aplicable a cualquier tipo de problema, ya sea estocástico o determinista. A diferencia de los métodos numéricos que se basan en evaluaciones en N puntos en un espacio M-dimensional para producir una solución aproximada, el método de Montecarlo tiene un error absoluto de la estimación que decrece como $\frac{1}{\sqrt{N}}$ en virtud del teorema del límite central.

6. Teorema del Límite Central

El Teorema del Límite Central o Teorema Central del Límite indica que, en condiciones muy generales, si S_n es la suma de n variables aleatorias independientes, entonces la función de distribución de S_n «se aproxima bien» a una distribución normal (también llamada *distribución gaussiana*, *curva de Gauss* o *campana de Gauss*). Así pues, el teorema asegura que esto ocurre cuando la suma de estas variables aleatorias e independientes es lo suficientemente grande

Sea $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ la función de densidad de la distribución normal definida como

$$f_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (8)$$

con una media μ y una varianza σ^2 . El caso en el que su función de densidad es $\mathcal{N}(0,1)$, a la distribución se le conoce como normal estándar.

Se define S_n como la suma de n variables aleatorias, independientes, idénticamente distribuidas, y con una media μ y varianza σ^2 finitas ($\sigma^2 \neq 0$):

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (9)$$

de manera que, la media de S_n es $n \cdot \mu$ y la varianza $n \cdot \sigma^2$, dado que son variables aleatorias independientes. Con tal de hacer más fácil la comprensión del teorema y su posterior uso, se hace una estandarización de S_n como

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad (10)$$

para que la media de la nueva variable sea igual a 0 y la desviación estándar sea igual a 1. Así, las variables Z_n convergerán en distribución a la distribución normal estándar $N(0,1)$, cuando n tienda a infinito. Como consecuencia, si $\Phi(z)$ es la función de distribución de $N(0,1)$, para cada número real z :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Pr}(Z_n \leq z) = \Phi(z) \quad (11)$$

Donde $\text{Pr}(\)$ indica probabilidad y \lim se refiere a límite matemático.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se ha realizado un experimento numérico en el que se han hecho corridas múltiples de generadores de números aleatorios (Figura 1), creando la función de densidad de probabilidad para los resultados y se ve que el resultado es gaussiano como predice la teoría. Esto es exactamente lo que el análisis de Monte Carlo se supone que debe hacer. En las situaciones donde se utiliza, las matemáticas necesarias para desarrollar la distribución de probabilidad son tan complejas que este método es la única manera de lograr el entendimiento necesario.

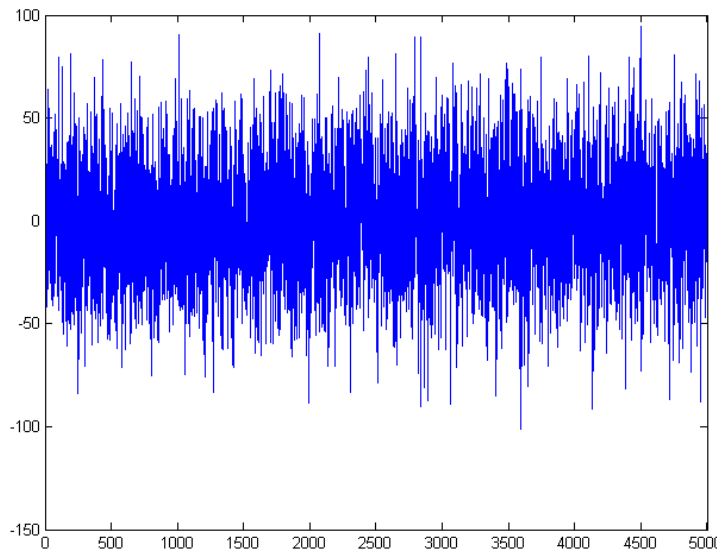


Figura 1. Corridas múltiples de generadores de números aleatorios

En la simulación anterior, generar 100 millones de variables aleatorias para crear el histograma (50 millones de variables en MATLAB antes de empezar el modelo, y

50 millones de variables en todos los intervalos de tiempo en el modelo).

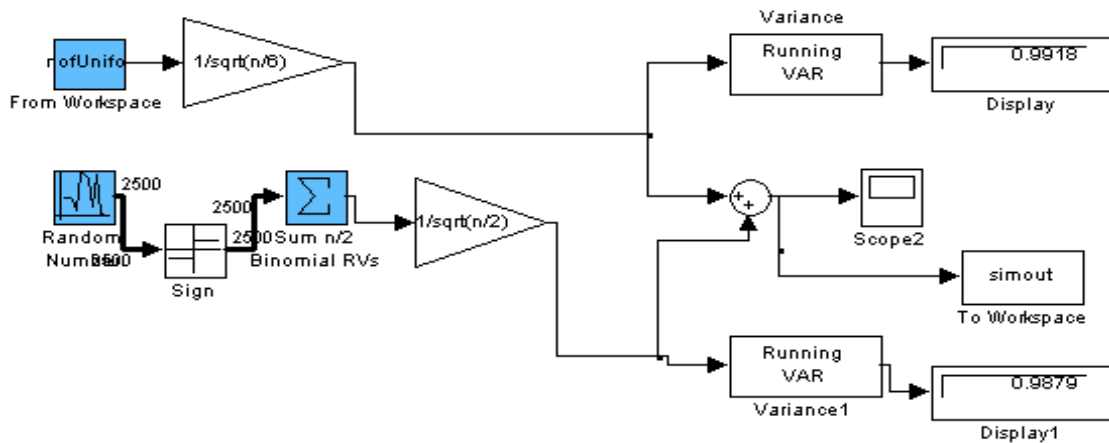


Figura 2. Modelo en Simulink para comprobación de Teorema de Límite Central usando simulación de MonteCarlo.

El resultado de la ejecución de este modelo con $n = 10.000$ se muestra en la Figura 3. Tenga en cuenta que la distribución es casi exactamente gaussiana, con media cero y varianza como las demandas teorema de límite central. Por lo tanto, hemos hecho un experimento

numérico en el que se ha hecho corridas múltiples de generadores de números aleatorios, y se crea la función de densidad de probabilidad para los resultados y se observa que el resultado es gaussiana como predice la teoría.

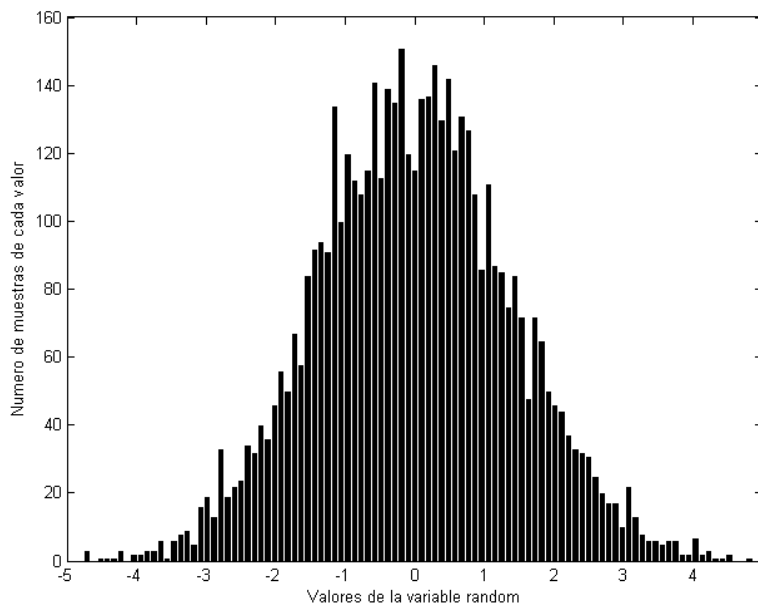


Figura 3. Histograma Resultado, Ilustrando Simulación de Monte Carlo y el Teorema del Límite Central (distribución de probabilidad)

En las situaciones donde se utiliza, las matemáticas necesarias para desarrollarla distribución de probabilidad son tan complejos que este método es la única manera de lograr el entendimiento necesario.

Es importante ver cómo los parámetros se establecieron en el cuadro de diálogo para la distribución binomial. Se utilizó la "banda limitada White Noise", que genera una variable aleatoria gaussiana en cada paso de tiempo, y luego se extrajeron de esta una variable aleatoria que es uno cuando el signo es positivo y -1 si es negativo.

Se utiliza el sign (signo) box de la Biblioteca de Matemáticas de Simulink. Se Añade los elementos en el vector resultante para crear una variable aleatoria que se encuentra entre $-n / 2$ y $n / 2$, por lo que se trata de una distribución binomial. El cuadro de diálogo para la banda limitada de bloquear el ruido blanco tiene el valor de la semilla aleatoria establecido en

$$12345:100:12345\ 100 * N/2 - 1.$$

La semilla debe ser un vector de valores diferentes para que cada uno de los $n / 2$ variables aleatorias generadas es

independiente. A partir de esta discusión, usted debería ser capaz de ver la forma de crear una simulación que contiene variables aleatorias, ya sea usando los generadores de números aleatorios en Simulink o

comandos usando MATLAB para generar números aleatorios. Sin embargo, se podría pensar en el ejemplo de que las únicas opciones para las variables aleatorias son distribuciones uniformes o de Gauss.

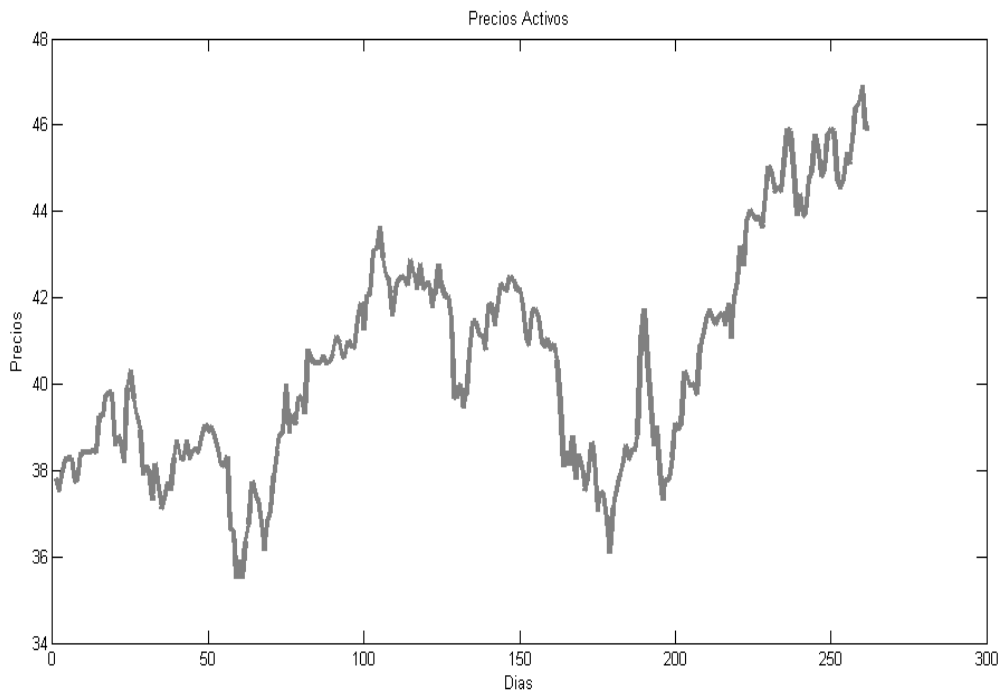


Figura 4. Precios Activos en el Mercado de la Vainilla

Al realizar el experimento del método en una Cartera de simulación (Monte Carlo) utilizando la función herramientas financieras se llamo a la simulación de la cartera para simular escenarios de 10000. [3].

Por supuesto, la correlación se conservan se asumió un horizonte de 6 días hábiles * 22, es decir, seis meses de vencimiento en el precio de la vainilla y se hizo una predicción según la información obtenida. [4].

Aplicando el método de Montecarlo se genero el siguiente histograma, donde observamos el precio día de la vainilla.

De igual manera se genera la apreciación para el precio anual del mismo vista en la Figura 6.

Todo esto para generar un panorama de pronóstico de precio en el mercado para la vainilla en un horizonte de un año hábil.

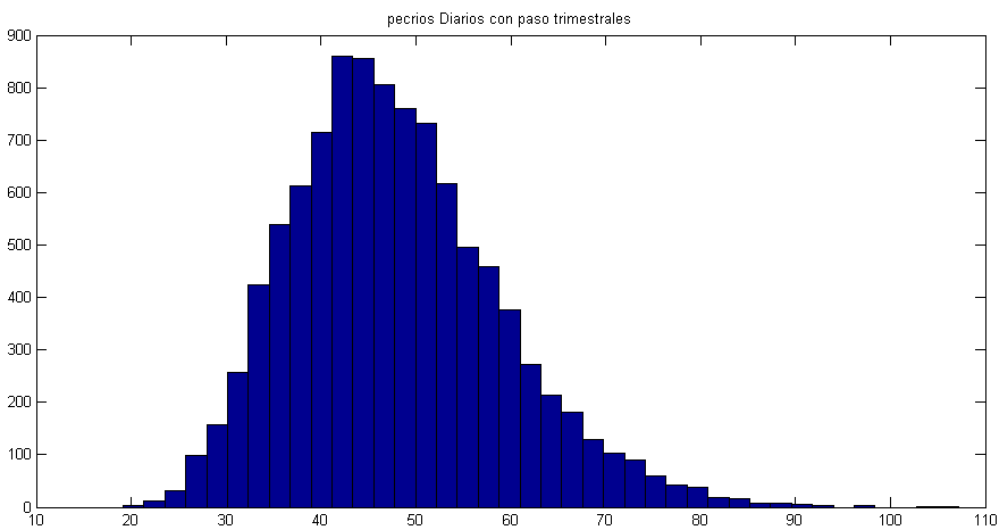


Figura 5. Precio de la vainilla a diario con pasos de 3 meses

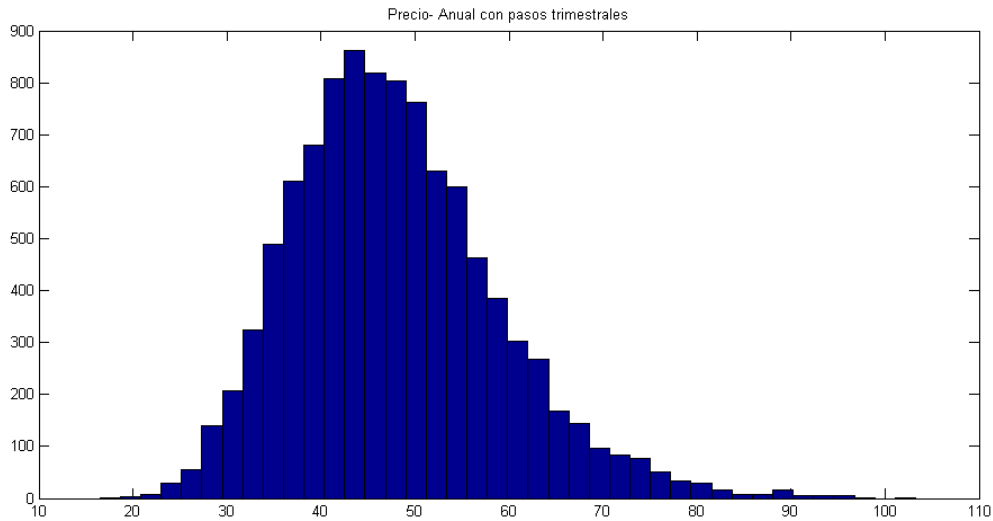


Figura 6. Precio de la vainilla por año con pasos de 3 meses

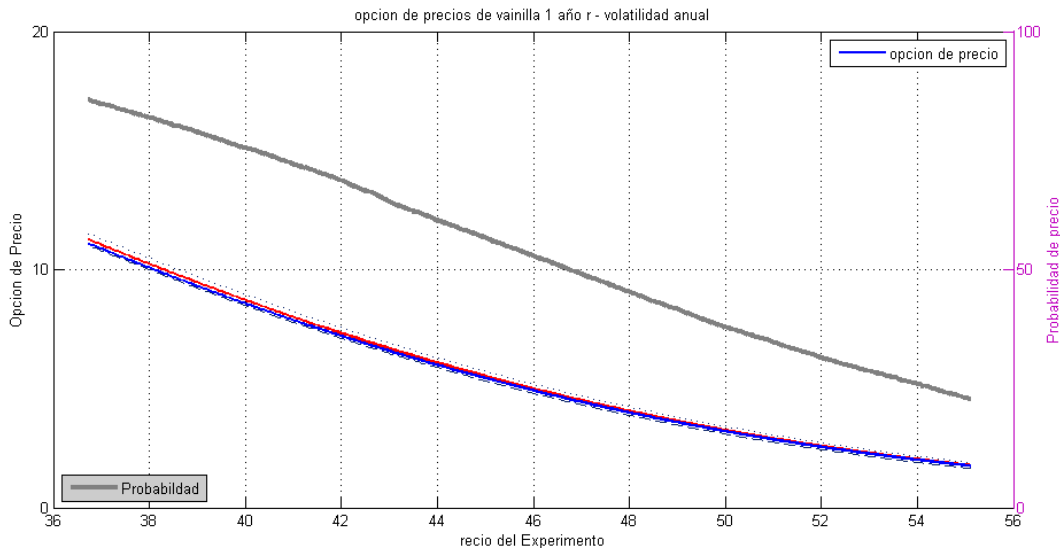


Figura 7. Opción de precio de la vainilla por año con pasos de 3 meses

De igual manera el método de Montecarlo muestra su efectividad al ser comparado con otros métodos más elaborados [5] y poco prácticos al momento de un entendimiento simple de las simulaciones [6] como lo muestra la Figura 8.

Además se puede apreciar como el intervalo de confianza absoluta disminuye en el método de Montecarlo simple [7] y el método de Montecarlo con control de variable como lo muestra Figura 9.

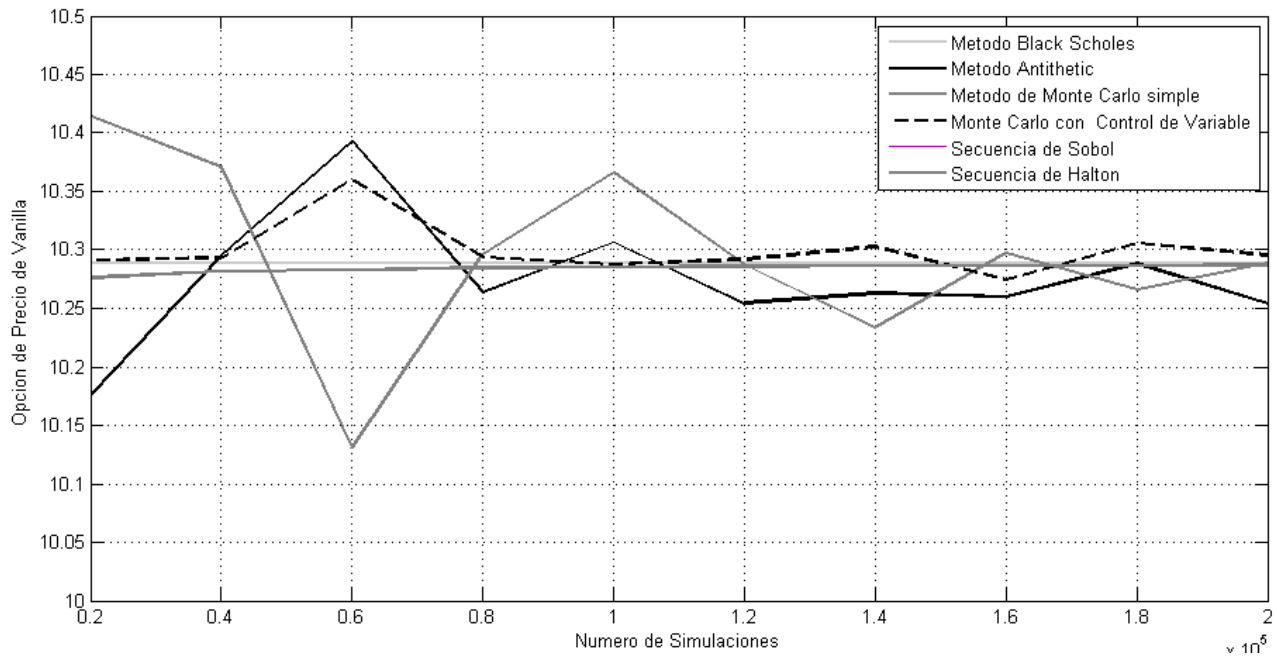


Figura 8. Comparación de los métodos en el problema del precio de la vainilla

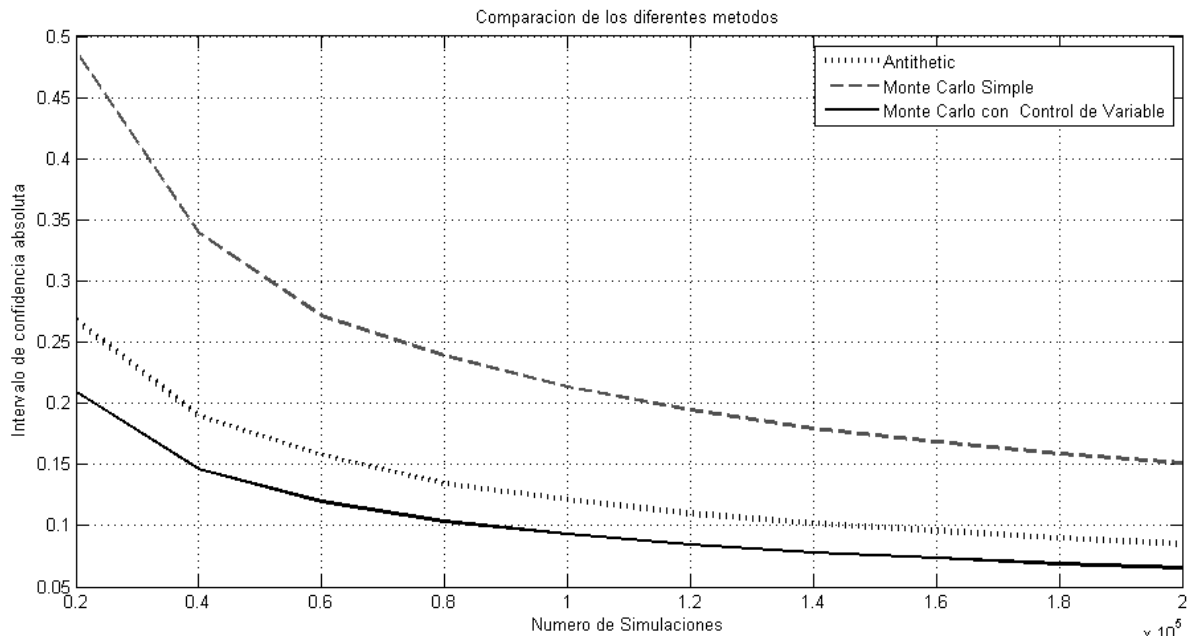


Figura 9. Intervalo de confianza absoluta para los diferentes métodos

IV. CONCLUSIONES

Las funciones de densidad de probabilidad usadas para la obtención de resultados generan resultados gaussianos como predice la teoría. Demostrando que Matlab reproduce exactamente el análisis de Monte Carlo se supone que debe hacer. En las situaciones donde se utiliza, las matemáticas necesarias para desarrollar la distribución de probabilidad son tan complejas que este

método es la única manera de lograr el entendimiento simple necesario para analizar los modelos desarrollados.

Para el experimento del mercado del precio vainilla se demostró la efectividad del método en la apreciación y pronóstico de precios, además, de su versatilidad y su eficacia contra otros métodos como lo muestran las Figura 8 y 9.

V. REFERENCIAS

1. Dagum, Camilo y Estela M. Bee de Dagum. Introducción a la Econometría. México: Siglo XXI editores, 2008.
2. Grinstead, Charles M. y J. Laurie Snell. «Central Limit Theorem.» Grinstead, Charles M. y J. Laurie Snell. Introduction to Probability. AMS, 1997. 325-360.
3. <http://www.bolsa.es/>. <http://www.bolsa.es/>. 12 de 11 de 2010. 03 de 02 de 2011 <<http://www.bolsa.es/>>.
4. Landro, Alberto. Elementos de Econometría de los Fenómenos Dinámicos. Buenos Aires: Ediciones Cooperativas, 2009.
5. Peña Sánchez de Rivera, Daniel. Fundamentos de Estadística. Alianza Editorial, 2008.
6. Ricardo Vicente Solé, Susanna C. Manrubia. Orden y caos en sistemas complejos: fundamentos. Edicions UPC, 2001.
7. Ropero Moriones, Eva. Manual de estadística empresarial. Delta Publicaciones, 2009.